C.d.L. in Scienze naturali – Matematica

03. 11. 2016

1. Un comune foglio di carta ha uno spessore di circa $0,072$ mm. Se il foglio venisse piegato una prima volta in due, poi il foglio ripiegato piegato di nuovo in due, poi una terza volta e così via, 42 volte in totale, quale sarebbe lo spessore raggiunto (in km)? $0,072 \text{ mm} = 7,2 \cdot 10^{-8}$ km, spessore $= 2^{42} \cdot 7,2 \cdot 10^{-8}$ km $= 2^{43} \cdot 3,6 \cdot 10^{-8}$ km; si ricordi che $2^{10} = 1024 \approx 10^3$, ne segue: spessore $\approx 10^{43 \cdot \frac{3}{10}} \cdot 3,6 \cdot 10^{-8}$ km $\approx 10^{13} \cdot 3,6 \cdot 10^{-8}$ km $= 3,6 \cdot 10^5$ km. (Con la calcolatrice si ottiene $3,2 \cdot 10^5$ km. Il valore medio della distanza lunare è $3,8 \cdot 10^5$ km.)

2. Si ricordi che il pH di una soluzione acquosa sufficientemente diluita è stato definito da Sørensen come $p\text{H} = -\log_{10}([\text{H}_3\text{O}^+]\ \text{dm}^3/\text{mol})$, dove $[\text{H}_3\text{O}^+]$ indica la concentrazione di H_3O^+.

   (a) Calcolare il pH di una soluzione $2,0 \cdot 10^{-3} M$ di HCl ($M = \text{mol}/\text{dm}^3$). $p\text{H} = -\log_{10}(2,0 \cdot 10^{-3}) = -\log_{10}(2,0) - \log_{10} 10^{-3} = 3,0 - \log_{10}(2,0) \approx 3,0 - 0,30 = 2,7$

   (b) Il pH di una soluzione è $9,67$, quello di un'altra $8,67$. Calcolare in entrambi i casi la concentrazione di H_3O^+. $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-9,67} M = 10^{0,33} \cdot 10^{-10} M \approx \sqrt[3]{10} \cdot 10^{-10} M$. Con la calcolatrice: $10^{-9,67} M \approx 2,14 \cdot 10^{-10} M$. Analogamente: $10^{-8,67} M \approx 2,14 \cdot 10^{-9} M$, cioè 10 volte la concentrazione di prima.

3. In determinate condizioni, il numero di un certo tipo di batteri triplica ogni due giorni. Se la crescita è esponenziale, qual è l'aumento percentuale dopo 6 ore? E dopo 18 ore? modello di crescita: $N(t) = N_0 3^{\frac{1}{48h} t}$, aumento percentuale dopo 6 ore: $\left(\frac{N_0 3^{\frac{1}{8}}}{N_0} - 1 \right) \cdot 100\% \approx 15\%$, dopo 18 ore: $\approx 51\%$

4. Si stima che la popolazione mondiale, attualmente di circa 7 miliardi di individui, aumenti dell'$1,1\%$ all'anno. Supponendo che il tasso di crescita rimanga invariato nel tempo, calcolare entro quanti anni la popolazione raddoppierà, quadruplicherà, decuplicherà. Sia n il numero degli anni che ci vogliono per arrivare ad k volte del numero iniziale della popolazione. Allora $(1+0,011)^n = k$, cioè $n = \log_{1,011} k = \frac{\log k}{\log(1,011)}$. Otteniamo 63, 127 e 210 anni rispettivamente.

5. Il carbonio isotopo ^{14}C è radioattivo e ha un tempo di dimezzamento (emivita, semiperiodo) di 5730 anni.

   (a) Siano presenti inizialmente N_0 atomi di ^{14}C. Determinare la costante di decadimento λ (in anno^{-1}) in modo tale che il numero N degli atomi presenti dopo t anni sia approssimativamente $N = N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$. Se $T_{\frac{1}{2}}$ il tempo di dimezzamento, allora dal modello di decadimento radioattivo $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ si ottiene $N(T_{\frac{1}{2}}) = N_0 e^{-\lambda T_{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} N_0 \Rightarrow e^{\lambda T_{\frac{1}{2}}} = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T_{\frac{1}{2}}} \approx 1,2096 \times 10^{-4}\text{anno}^{-1}$.

(b) Di quale percentuale si riduce una data quantità di ^{14}C annualmente?
$\frac{N(t+1\,\text{anno})}{N(t)} = \frac{N_0 e^{-\lambda(t+1\,\text{anno})}}{N_0 e^{-\lambda t}} \approx e^{-1,2\times 10^{-4}} \approx 0,99988$, quindi la riduzione annuale è di $0,012\,\%$.

(c) Calcolare il tempo necessario affinché una data quantità di ^{14}C si riduca al $12,5\%$ della quantità iniziale.
Sia t il tempo necessario, allora $\dfrac{N_0 e^{-\lambda t}}{N_0} = 0,125 \Rightarrow -\lambda t = \ln(0,125) \Rightarrow$ $t = -\dfrac{\ln(0,125)}{\lambda} = -\dfrac{\ln(0,125)}{\ln(2)} T_{\frac{1}{2}} = 17190$ anni; altro metodo: $12,5\% = \frac{1}{8} = (\frac{1}{2})^3$, cioè il tempo necessario è uguale a 3 tempi di dimezzamento: $3 \cdot 5730$ anni $= 17190$ anni.

6. (Abate, Esercizio 5.21) Per ciascuna delle funzioni seguenti, determinane l'immagine, stabilisci se è iniettiva e, in tal caso, trova la funzione inversa:

(a) $f_1(x) = 5e^{4x}$; $f_1(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$; è iniettiva; $x = f_1^{-1}(y) = \frac{1}{4}\ln\frac{y}{5}$.

(b) $f_2(x) = 3 + e^{x+2}$; $f_2(\mathbb{R}) =]3, +\infty[$; è iniettiva; $x = f_2^{-1}(y) = \ln(y-3) - 2$.

(c) $f_3(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$. $f_3(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$; è iniettiva; $x = f_3^{-1}(y) = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$.

7. (Abate, Esercizio 5.22) Risolvi le seguenti equazioni:

(a) $2^{3x+1} = 4$; $x = \frac{1}{3}$.

(b) $\log_3 x^2 - \log_3(2x) = 2$; $x = 18$.

(c) $\log_3 5 + \log_3 7 = \log_3 x$; $x = 35$.

(d) $\log_4 x + \log_4(x-5) = 2$; $x = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{89})$.

(e) $-\log_3 6 + \log_3 8 = \log_3 x$; $x = \frac{4}{3}$.

(f) $-\log_5(x-3) + \log_5(x+2) = 5$. $x = 3 + \frac{5}{3124}$.