C.d.L. in Scienze naturali – Matematica 02. 12. 2016

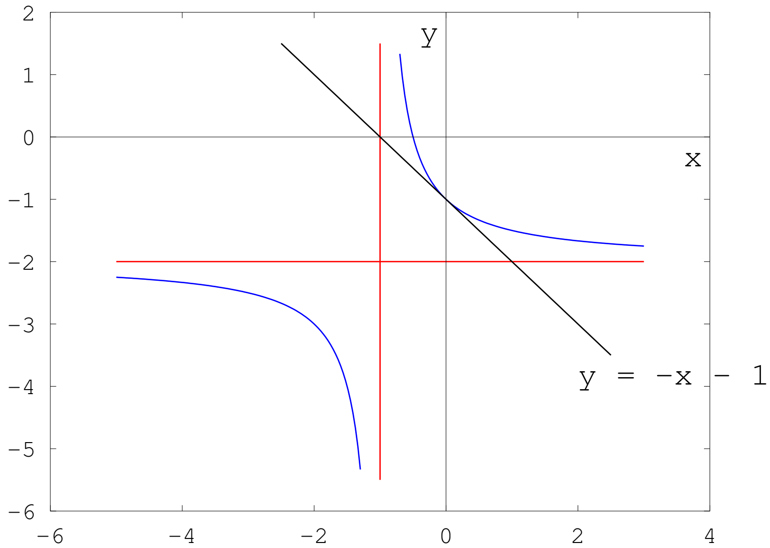
1. Data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - 2, \quad x \neq -1,$

   (a) stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente; $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0\ \forall x \neq 0 \Rightarrow f$ è monotona decrescente in $]-\infty, -1[\ \cup\ ]-1, +\infty[\ = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

   (b) stabilire in quali intervalli la funzione è convessa, ed in quali intervalli è concava; f è concava $\Leftrightarrow f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} > 0\ \Leftrightarrow x > 0$

   (c) determinare i limiti: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -2$;
   Le rette di equazioni $y = -2$ e $x = -1$ sono asintoto orizzontale e verticale (sinistro discendente e destro ascendente) rispettivamente.

   (d) disegnare il grafico;



   (e) calcolare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $(0, -1)$.
   $y + 1 = f'(0)x$, ossia $y = -x - 1$

2. Determinare i minimi e massimi relativi e i punti di flesso delle funzioni:

   (a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$;

   $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$;

   $f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$;

   (b) $f(x) = 1 + \dfrac{x}{3} + \dfrac{3}{x}, \quad x \neq 0$;

   $f'(x) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{x^2}, \quad x \neq 0$;

   $f''(x) = \dfrac{6}{x^3}, \quad x \neq 0$;

   (c) $f(x) = \sqrt{x}\ \ln\dfrac{1}{x} = -\sqrt{x}\ \ln x, \quad x > 0$;

   $f'(x) = \dfrac{-\ln x - 2}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0$;

   $f''(x) = \dfrac{\ln x}{4x\sqrt{x}}, \quad x > 0$;

   (d) $f(x) = xe^{-x}$.

   $f'(x) = (1-x)e^{-x}$;

   $f''(x) = (x-2)e^{-x}$.

   Dallo studio del cambiamento del segno della derivata prima si ottengono i punti di minimi (m) e i massimi (M) relativi; dallo studio del cambiamento del segno della derivata seconda si ottengono i punti di flesso (F):

(a) $M=(-1,5),\ m=(3,-27),\ F=(1,-11)$; (b) $M=(-3,-1),\ m(3,3)$;

(c) $M=(e^{-2},2e^{-1}),\ F=(1,0)$; (d) $M=(1,e^{-1}),\ F=(2,2e^{-2})$.

I flessi di (a), (c) e (d) sono ascendenti.

3. Data la funzione $f(x)=x\ln x,\ \ x>0$,

   (a) determinare gli intervalli in cui essa è crescente o decrescente; $f'(x)=1+\ln(x)\geq 0 \Leftrightarrow \ln(x)\geq -1 \Leftrightarrow x=e^{\ln x}\geq e^{-1}=\frac{1}{e}$; per $0<x\leq\frac{1}{e}$ la f è decrescente e per $x\geq\frac{1}{e}$ crescente.

   (b) determinare i minimi e i massimi relativi;
   Da (a) segue che $(\frac{1}{e},-\frac{1}{e})$ è un punti di minimo relativo e assoluto di f.

   (c) calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 e di punto iniziale $\frac{1}{e}$;
   $p_2(x)=f(\frac{1}{e})+f'(\frac{1}{e})(x-\frac{1}{e})+\frac{1}{2}f''(\frac{1}{e})(x-\frac{1}{e})^2=-\frac{1}{e}+\frac{e}{2}(x-\frac{1}{e})^2$

   (d) calcolare $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ applicando la regola di de l'Hospital (si noti che $f(x)=\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$).
   $$\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0^- \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}f(x)=0^-=0$$

4. Utilizzate la regola di Bernoulli-l'Hospital per calcolare i seguenti limiti:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1+\cos\pi x}{x^2-2x+1}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\ln x}$, (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}x^2\ln x$

   Suggerimento per (c): si noti che $x^2\ln x=\dfrac{\ln x}{x^{-2}}$.

   (a) forma indeterminata $[\frac{0}{0}]$; calcoliamo $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{(1+\cos\pi x)'}{(x^2-2x+1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{-\pi\operatorname{sen}\pi x}{2x-2}$ che è di nuovo della forma $[\frac{0}{0}]$; calcoliamo $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{(-\pi\operatorname{sen}\pi x)'}{(2x-2)'}=\lim_{x\to 1}\frac{-\pi^2\cos\pi x}{2}=-\frac{\pi^2}{2}$, quindi $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1+\cos\pi x}{x^2-2x+1}=-\frac{\pi^2}{2}$.

   (b) Non è una forma indeterminata e la regola di De l'Hospital non è applicabile; il limite è immediato: $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\ln x}=0$.

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-2}}$ è della forma $[\frac{\infty}{\infty}]$; calcoliamo $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{(x^{-2})'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{-1}}{-2x^{-3}}=\lim_{x\to 0^+}(-\frac{x^2}{2})=0$, quindi $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}x^2\ln x=0$.

5. Trovare il punto di flesso e i limiti $\lim_{t\to-\infty}N(t)$ e $\lim_{t\to+\infty}N(t)$ della seguente funzione logistica:
   $$N(t)=\frac{5}{1+e^{-2t+3}}\,.$$
   $N'(t)=\frac{10e^{-2t+3}}{(1+e^{-2t+3})^2}=\frac{2}{5}e^{-2t+3}[N(t)]^2$,
   $N''(t)=\frac{2}{5}\left(-2e^{-2t+3}[N(t)]^2+2e^{-2t+3}N(t)N'(t)\right)=\frac{4}{5}e^{-2t+3}N(t)[-N(t)+N'(t)]$,
   ne segue: $N''(t)\geq 0 \Leftrightarrow N'(t)\geq N(t) \Leftrightarrow \frac{2e^{-2t+3}}{1+e^{-2t+3}}\geq 1 \Leftrightarrow 2e^{-2t+3}\geq 1+e^{-2t+3}\Leftrightarrow e^{-2t+3}\geq 1\Leftrightarrow -2t+3\geq 0\Leftrightarrow t\leq\frac{3}{2}$, quindi il punto $\left(\frac{3}{2},N(\frac{3}{2})\right)=\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$ è un punto di flesso discendente per il grafico di N.

   Asintoti: $\lim_{t\to-\infty}N(t)=0\Rightarrow$ la retta di equazione $y=0$ è asintoto orizzontale sinistro; $\lim_{t\to+\infty}N(t)=5\Rightarrow$ la retta di equazione $y=5$ è asintoto orizzontale destro.