C.d.L. in Scienze naturali
Prova di Matematica del 17/01/2017

Cognome: ____________________

Nome: ____________________

Matricola: ____________________

Svolgere gli esercizi nelle facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Data la funzione $f(x) = \left(1 - e^{-3(x-1)}\right)^2$, $x \in \mathbb{R}$, calcolare

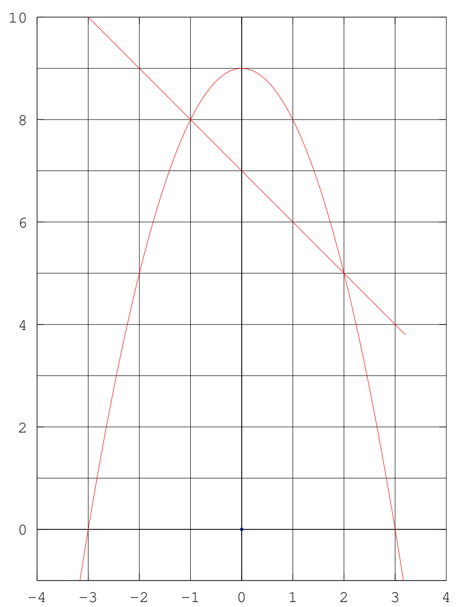
   (a) $f'(x) = \boxed{2\left(1 - e^{-3(x-1)}\right)\left(1 - e^{-3(x-1)}\right)' = 6e^{-3(x-1)}\left(1 - e^{-3(x-1)}\right)}$

   (b) $f''(x) = \boxed{-18e^{-3(x-1)}\left(1 - e^{-3(x-1)}\right) + 18e^{-6(x-1)}}$

   (c) il polinomio di Taylor della f di grado 2 e di centro 1:

   $\boxed{f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 = 9(x-1)^2}$

2. Determinare la misura (non negativa) dell'area della parte di piano delimitata dalla parabola di equazione $y = 9 - x^2$ e dalla retta di equazione $y = -x + 7$. Si faccia un disegno:



$$
\begin{aligned}
& \int_{-1}^{2} \left(9 - x^2 - (-x + 7)\right) dx \\
= & \int_{-1}^{2} \left(-x^2 + x + 2)\right) dx \\
= & \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^{2} \\
= & -\frac{8}{3} + 2 + 4 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) \\
= & \frac{9}{2}
\end{aligned}
$$

3. Calcolare

(a) $\displaystyle\int_{-12}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-2x}}\,dx = \boxed{\int_{-12}^{0} (1-2x)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \left[-(1-2x)^{\frac{1}{2}}\right]_{-12}^{0} = -1+5 = 4}$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} x\,\mathrm{sen}(3x)\,dx = \boxed{\begin{array}{l}\left[-\frac{1}{3}x\cos(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(3x)\,dx = \\ = 0 + \left[\frac{1}{9}\,\mathrm{sen}(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{9}\end{array}}$

(c) $\displaystyle\int_{-2}^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}\,dx = \boxed{\lim_{b\to+\infty}\left[-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_{-2}^{b} = 2e}$

(d) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\mathrm{sen}\,x}{3+\cos x}\,dx = \boxed{-\left[\ln|3+\cos x|\right]_0^{\pi} = -\ln 2 + \ln 4 = \ln 2}$

4. Calcolare la soluzione $y = y(x)$ dei seguenti problemi di Cauchy:

(a) $\begin{cases} y' = y(2-y) \\ y(0) = \frac{1}{2}\,, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y' = y(2-y) \\ y(0) = -1\,. \end{cases}$

Suggerimento: Per l'integrazione si noti che $\frac{1}{y(2-y)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{2-y}\right)$.

$\boxed{y(x) = \dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}+3} = \dfrac{2}{1+3e^{-2x}},\ x \in \mathbb{R}}$ $\boxed{y(x) = \dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}-3} = \dfrac{2}{1-3e^{-2x}},\ x < \dfrac{\ln 3}{2}}$

Se $y \neq 0$ e $y \neq 2$, allora $\int \frac{dy}{y(2-y)} = \int dx$. Con $\frac{1}{y(2-y)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{2-y}\right)$ si ottiene $\ln\left|\frac{y}{2-y}\right| = 2x + c$ (c è costante di integrazione), quindi $\left|\frac{y}{2-y}\right| = e^{2x+c} = e^c e^{2x}$. Nel caso (a) $\left|\frac{y}{2-y}\right| = \frac{y}{2-y} = e^{2x+c}$ e $\frac{\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} = e^c \Rightarrow \frac{y}{2-y} = \frac{1}{3}e^{2x} \Rightarrow y = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+3}$, $x \in \mathbb{R}$. Nel caso (b) $\left|\frac{y}{2-y}\right| = \frac{y}{y-2} = e^{2x+c}$ e $\frac{-1}{-1-2} = \frac{1}{3} = e^c \Rightarrow \frac{y}{y-2} = \frac{1}{3}e^{2x} \Rightarrow y = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-3}$, $x < \frac{\ln 3}{2}$.

5. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -8 & -11 \\ -7 & -10 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

(a) risolvere il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}}$,

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R2+2R1 \to \\ R3-2R1 \to \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 10 & 2 \\ 0 & 2 & -7 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ R3+\frac{2}{3}R2 \to \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R2/(-3) \rightarrow \\ (-3)R3 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{10}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} R1 - 3R3 \rightarrow \\ R2 + \frac{10}{3}R3 \rightarrow \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \; R1 + 2R2 \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(b) calcolare (se ciò è possibile) $\mathbf{AB} = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$, $\mathbf{B}^T\mathbf{A} = \boxed{\begin{bmatrix} 2 & 13 & -50 \\ 3 & 18 & -70 \end{bmatrix}}$,

(c) calcolare (se ciò è possibile) $\mathbf{A}^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix} 7 & -8 & -11 \\ 6 & -7 & -10 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}}$.

N.B.: Non occorrono ulteriori calcoli. Poiché $\mathbf{Ax}$ fornisce la prima colonna e $\mathbf{AB}$ la seconda e la terza colonna della matrice identità, $\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{x}|\mathbf{B})$.

C.d.L. in Scienze naturali
Prova di Matematica del 17/01/2017

Cognome: ______________________________

Nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Svolgere gli esercizi nelle facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Data la funzione $f(x) = \left(1 - e^{-4(x-2)}\right)^2$, $x \in \mathbb{R}$, calcolare

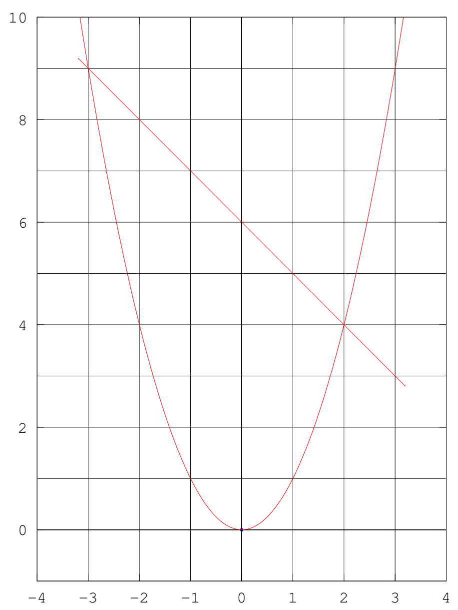
   (a) $f'(x) = \boxed{2\left(1 - e^{-4(x-2)}\right)\left(1 - e^{-4(x-2)}\right)' = 8e^{-4(x-2)}\left(1 - e^{-4(x-2)}\right)}$

   (b) $f''(x) = \boxed{-32e^{-4(x-2)}\left(1 - e^{-4(x-2)}\right) + 32e^{-8(x-2)}}$

   (c) il polinomio di Taylor della f di grado 2 e di centro 2:

   $\boxed{f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 = 16(x-2)^2}$

2. Determinare la misura (non negativa) dell'area della parte di piano delimitata dalla parabola di equazione $y = x^2$ e dalla retta di equazione $y = -x + 6$. Si faccia un disegno:



$$
\begin{aligned}
&\int_{-3}^{2} (-x + 6 - x^2)\, dx \\
&= \left[-\frac{1}{2}x^2 + 6x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-3}^{2} \\
&= -2 + 12 - \frac{8}{3} - \left(-\frac{9}{2} - 18 + 9\right) \\
&= \frac{125}{6}
\end{aligned}
$$

3. Calcolare

(a) $\displaystyle\int_{-5}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-3x}}\, dx =$ $\boxed{\displaystyle\int_{-5}^{0} (1-3x)^{-\frac{1}{2}}\, dx = \left[-\frac{2}{3}(1-3x)^{\frac{1}{2}}\right]_{-5}^{0} = -\frac{2}{3} + \frac{8}{3} = 2}$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} x\cos(3x)\, dx =$ $\boxed{\begin{aligned}&\left[\frac{1}{3}x\,\mathrm{sen}(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{sen}(3x)\, dx = \\ &= 0 + \left[\frac{1}{9}\cos(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{9} - \frac{1}{9} = -\frac{2}{9}\end{aligned}}$

(c) $\displaystyle\int_{-3}^{+\infty} e^{-\frac{x}{3}}\, dx =$ $\boxed{\displaystyle\lim_{b\to+\infty} \left[-3e^{-\frac{x}{3}}\right]_{-3}^{b} = 3e}$

(d) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\mathrm{sen}\, x}{2+\cos x}\, dx =$ $\boxed{-\left[\ln|2+\cos x|\right]_0^{\pi} = -\ln 1 + \ln 3 = \ln 3}$

4. Calcolare la soluzione $y = y(x)$ dei seguenti problemi di Cauchy:

(a) $\begin{cases} y' = y(3-y) \\ y(0) = 1\,, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y' = y(3-y) \\ y(0) = -1\,. \end{cases}$

Suggerimento: Per l'integrazione si noti che $\frac{1}{y(3-y)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{3-y}\right)$.

$\boxed{y(x) = \dfrac{3e^{3x}}{e^{3x}+2} = \dfrac{3}{1+2e^{-3x}},\ x \in \mathbb{R}}$ $\boxed{y(x) = \dfrac{3e^{3x}}{e^{3x}-4} = \dfrac{3}{1-4e^{-3x}},\ x < \dfrac{\ln 4}{3}}$

Se $y \neq 0$ e $y \neq 3$, allora $\int \frac{dy}{y(3-y)} = \int dx$. Con $\frac{1}{y(3-y)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{3-y}\right)$ si ottiene $\ln|\frac{y}{3-y}| = 3x + c$ (c è costante di integrazione), quindi $|\frac{y}{3-y}| = e^{3x+c} = e^c e^{3x}$. Nel caso (a) $|\frac{y}{3-y}| = \frac{y}{3-y} = e^{3x+c}$ e $\frac{1}{3-1} = \frac{1}{2} = e^c \Rightarrow \frac{y}{3-y} = \frac{1}{2}e^{3x} \Rightarrow y = \frac{3e^{3x}}{e^{3x}+2}$, $x \in \mathbb{R}$. Nel caso (b) $|\frac{y}{3-y}| = \frac{y}{y-3} = e^{3x+c}$ e $\frac{-1}{-1-3} = \frac{1}{4} = e^c \Rightarrow \frac{y}{y-3} = \frac{1}{4}e^{3x} \Rightarrow y = \frac{3e^{3x}}{e^{3x}-4}$, $x < \frac{\ln 4}{3}$.

5. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -9 & 12 \\ 1 & -1 \\ -7 & 9 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

(a) risolvere il sistema lineare $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan: $\mathbf{x} =$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R2+2R1 \to \\ R3-R1 \to \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ R3+\frac{1}{9}R2 \to \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R2/9 \to \\ 9R3 \to \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R1 + R3 \to \\ R2 - \frac{1}{9}R3 \to \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \; R1 - 3R2 \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) calcolare (se ciò è possibile) $\mathbf{AB} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$, $\mathbf{B}^T\mathbf{A} = \boxed{\begin{bmatrix} -18 & -38 & 19 \\ 23 & 51 & -24 \end{bmatrix}}$,

(c) calcolare (se ciò è possibile) $\mathbf{A}^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix} -9 & 1 & 12 \\ 1 & 0 & -1 \\ -7 & 1 & 9 \end{bmatrix}}$.

N.B.: Non occorrono ulteriori calcoli. Poiché $\mathbf{Ax}$ fornisce la seconda colonna e $\mathbf{AB}$ la prima e la terza colonna della matrice identità, $\mathbf{A}^{-1} =$ (prima colonna di $\mathbf{B}|\mathbf{x}|$terza colonna di $\mathbf{B}$).

C.d.L. in Scienze naturali
Prova di Matematica del 17/01/2017

Cognome: ______________________________

Nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Svolgere gli esercizi nelle facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Data la funzione $f(x) = \left(1 - e^{-2(x-3)}\right)^2$, $x \in \mathbb{R}$, calcolare

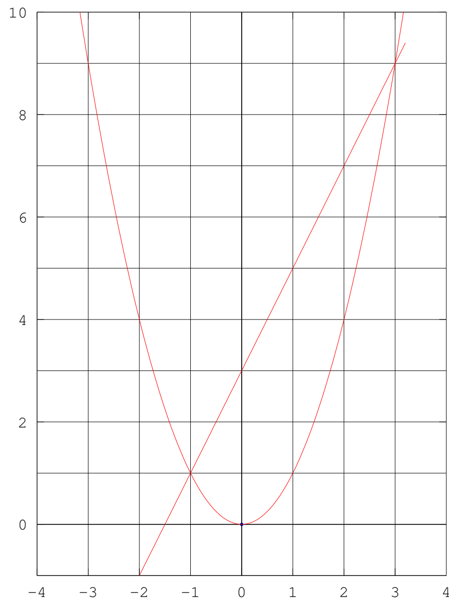
   (a) $f'(x) = \boxed{2\left(1 - e^{-2(x-3)}\right)\left(1 - e^{-2(x-3)}\right)' = 4e^{-2(x-3)}\left(1 - e^{-2(x-3)}\right)}$

   (b) $f''(x) = \boxed{-8e^{-2(x-3)}\left(1 - e^{-2(x-3)}\right) + 8e^{-4(x-3)}}$

   (c) il polinomio di Taylor della f di grado 2 e di centro 3:

   $\boxed{f(3) + f'(3)(x-3) + \frac{f''(3)}{2!}(x-3)^2 = 4(x-3)^2}$

2. Determinare la misura (non negativa) dell'area della parte di piano delimitata dalla parabola di equazione $y = x^2$ e dalla retta di equazione $y = 2x + 3$. Si faccia un disegno:



$$\int_{-1}^{3} (2x + 3 - x^2)\,dx$$
$$= \left[x^2 + 3x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{3}$$
$$= 9 + 9 - 9 - \left(1 - 3 + \frac{1}{3}\right)$$
$$= \frac{32}{3}$$

3. Calcolare

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-4x}}\,dx = \boxed{\int_{-2}^{0}(1-4x)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \left[-\frac{2}{4}(1-4x)^{\frac{1}{2}}\right]_{-2}^{0} = -\frac{1}{2}+\frac{3}{2} = 1}$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x\,\mathrm{sen}(2x)\,dx = \boxed{\begin{aligned}&\left[-\frac{1}{2}x\cos(2x)\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos(2x)\,dx = \\ &= 0 + \left[\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(2x)\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}\end{aligned}}$

(c) $\displaystyle\int_{-4}^{+\infty} e^{-\frac{x}{4}}\,dx = \boxed{\lim_{b\to+\infty}\left[-4e^{-\frac{x}{4}}\right]_{-4}^{b} = 4e}$

(d) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{\cos x}{3+\mathrm{sen}\,x}\,dx = \boxed{\left[\ln|3+\mathrm{sen}\,x|\right]_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} = \ln 2 - \ln 4 = -\ln 2}$

4. Calcolare la soluzione $y = y(x)$ dei seguenti problemi di Cauchy:

(a) $\begin{cases} y' = y(4-y) \\ y(0) = 1\,, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y' = y(4-y) \\ y(0) = -1\,. \end{cases}$

Suggerimento: Per l'integrazione si noti che $\frac{1}{y(4-y)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{4-y}\right)$.

$\boxed{y(x) = \dfrac{4e^{4x}}{e^{4x}+3} = \dfrac{4}{1+3e^{-4x}},\ x\in\mathbb{R}}$ $\boxed{y(x) = \dfrac{4e^{4x}}{e^{4x}-5} = \dfrac{4}{1-5e^{-4x}},\ x < \dfrac{\ln 5}{4}}$

Se $y \neq 0$ e $y \neq 4$, allora $\int \frac{dy}{y(4-y)} = \int dx$. Con $\frac{1}{y(4-y)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{4-y}\right)$ si ottiene $\ln\left|\frac{y}{4-y}\right| = 4x + c$ (c è costante di integrazione), quindi $\left|\frac{y}{4-y}\right| = e^{4x+c} = e^c e^{4x}$. Nel caso (a) $\left|\frac{y}{4-y}\right| = \frac{y}{4-y} = e^{4x+c}$ e $\frac{1}{4-1} = \frac{1}{3} = e^c \Rightarrow \frac{y}{4-y} = \frac{1}{3}e^{4x} \Rightarrow y = \frac{4e^{4x}}{e^{4x}+3}$, $x\in\mathbb{R}$. Nel caso (b) $\left|\frac{y}{4-y}\right| = \frac{y}{y-4} = e^{4x+c}$ e $\frac{-1}{-1-4} = \frac{1}{5} = e^c \Rightarrow \frac{y}{y-4} = \frac{1}{5}e^{4x} \Rightarrow y = \frac{4e^{4x}}{e^{4x}-5}$, $x < \frac{\ln 5}{4}$.

5. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 16 & -11 \\ -7 & 5 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

(a) risolvere il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan: $\mathbf{x} =$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 9 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}}$,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ R2-2R1\to \\ R3-3R1\to \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ R3-\frac{3}{4}R2\to \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R2/(-4) \rightarrow \\ 4R3 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} R1+R3 \rightarrow \\ R2+\frac{5}{4}R3 \rightarrow \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \ R1-3R2 \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

(b) calcolare (se ciò è possibile) $\mathbf{AB} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$, $\mathbf{B}^T\mathbf{A} = \boxed{\begin{bmatrix} -16 & -2 & -43 \\ 11 & 1 & 30 \end{bmatrix}}$,

(c) calcolare (se ciò è possibile) $\mathbf{A}^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix} 16 & 9 & -11 \\ -7 & -4 & 5 \\ -6 & -3 & 4 \end{bmatrix}}$.

N.B.: Non occorrono ulteriori calcoli. Poiché $\mathbf{Ax}$ fornisce la seconda colonna e $\mathbf{AB}$ la prima e la terza colonna della matrice identità, $\mathbf{A}^{-1} =$ (prima colonna di $\mathbf{B}|\mathbf{x}|$terza colonna di $\mathbf{B}$).