C.d.L. in Scienze naturali
Prova di Matematica del 20/01/2017

Cognome: ______________________________

Nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Svolgere gli esercizi nelle facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Si utilizzino solo le cifre $1, 2, 3, 4, 5, 6$ per formare dei numeri.

   Quanti numeri di 4 cifre, anche ripetute, si possono formare? $\boxed{6^4 = 2^4 \cdot 3^4 = 16 \cdot 81 = 1296}$

   Quanti di questi numeri contengono esattamente due volte la cifra 6? $\boxed{\binom{4}{2} \cdot 5^2 = 150}$

   Quanti numeri di 4 cifre tutte distinte si possono formare? $\boxed{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360}$

2. Data la funzione $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x$, $x > 0$, calcolare:

   (a) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \boxed{0 \left(= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to 0^+} -2\sqrt{x} \right)}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$

   (Per trovare il primo limite è utile la regola di de l'Hospital, $f(x) = \frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}}$.)

   (b) $f'(x) = \boxed{(\sqrt{x})' \ln x + \sqrt{x}(\ln x)' = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}}}$

   (c) $f''(x) = \boxed{\frac{(2 + \ln x)' 2\sqrt{x} - (2 + \ln x)(2\sqrt{x})'}{4x} = \frac{2 - (2 + \ln x)}{4x\sqrt{x}} = -\frac{\ln x}{4x\sqrt{x}}}$

   (d) i punti stazionari di f e classificarli:

   $\boxed{f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2};\ f''(e^{-2}) = \frac{2e^3}{4} > 0;\ (e^{-2}, -2e^{-1}) \text{ min.}}$

   (e) l'equazione della retta tangente al grafico della f nel punto $(1, 0)$:

   $\boxed{y = f'(1)(x - 1) = x - 1}$

   (f) i punti di flesso della f:

   $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$; f'' cambia in 1 il segno da $+$ a $-$; $(1, 0)$ è punto di flesso discendente

   (g) $\int_1^{e^2} \sqrt{x} \cdot \ln x \, dx = \boxed{\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \ln x\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{4}{3}e^3 - \left[\frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^{e^2} = \frac{8e^3 + 4}{9}}$

   (integrazione per parti)

3. Calcolare

(a) $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\left(-\frac{x}{3}\right)\, dx = \boxed{\int_0^{\pi} -\operatorname{sen}\left(\frac{x}{3}\right)\, dx = \left[3\cos\left(\frac{x}{3}\right)\right]_0^{\pi} = \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2}}$

(b) $\int_{-3}^{0} \frac{x}{\sqrt{1-x}}\, dx = \boxed{2\int_2^1 (u^2-1)\, du = 2\left[\frac{1}{3}u^3 - u\right]_2^1 = 2\left(-\frac{7}{3}+1\right) = -\frac{8}{3}}$

(per sostituzione: $u = \sqrt{1-x}$) , $x = 1-u^2$, $\frac{dx}{du} = -2u \Rightarrow dx = -2u\, du$

4. Calcolare la soluzione $y = y(x)$ del seguente problema di Cauchy, e precisare il suo dominio:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -y \\ y(0) = -3\,. \end{cases}$$

$\boxed{y(x) = -3e^{-x} \qquad \text{dominio: } \mathbb{R}}$

Se $y < 0$, $\int \frac{1}{y}\, dy = -\int 1\, dx \Rightarrow \ln|y| = -x + c$ (c è costante di integrazione) $\Rightarrow |y| = -y = e^{-x+c} = e^{-x}\cdot e^{c}$. Dalla condizione iniziale si ha $3 = e^0 \cdot e^c = e^c$, quindi $y = -3e^{-x}, x \in \mathbb{R}$.

5. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 7 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & -4 \end{bmatrix}, \mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$,

(a) calcolare la soluzione del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}}$,

(b) calcolare (se ciò è possibile) $\mathbf{Aa} = \boxed{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \mathbf{b}}$, $\mathbf{ba}^T = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}}$,

(c) dire se $\mathbf{A}$ è invertibile e giustificare la risposta:

Nella riduzione a scala della matrice $\mathbf{A}$ ci sono 2 gradini. Quindi $\mathbb{A}$ è una matrice 3×3 di rango $2 < 3$. Ne segue che $\mathbf{A}$ non è invertibile.
Oppure: Se $\mathbf{A}$ fosse invertibile, il sistema lineare (a) dovrebbe avere una sola soluzione. Al contrario tale sistema ha infinite soluzioni.

(a)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 7 & -4 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -4 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R_2 - \frac{7}{2}R_1 \to \\ R_3 + \frac{3}{2}R_1 \to \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{11}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{11}{2} & -1 \end{array}\right] R_3 + R_2 \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{11}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \frac{1}{2}R_1 \to \\ -2R_2 \to \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -11 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] R_1 + \frac{1}{2}R_2 \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & -11 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$