C.d.L. in Scienze naturali
Prova di Matematica del 16/06/2017

Cognome: ______________________________

Nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Svolgere gli esercizi nelle facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Dato un insieme di 22 elementi, quanti sottoinsiemi di 19 elementi si possono formare? $\boxed{\binom{22}{19} = \binom{22}{3} = \frac{22 \cdot 21 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 11 \cdot 7 \cdot 20 = 1540}$

   Quante sono le possibili funzioni $\{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$? $\boxed{3^3 = 27}$

   Quante di tali funzioni sono iniettive? $\boxed{3! = 6}$

2. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$, calcolare

   (a) la soluzione del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

   $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$, (b) $\mathbf{A}^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}}$,

   (c) (se ciò è possibile) $\mathbf{b}^T\mathbf{b} = \boxed{20}$, dove $\mathbf{b}^T$ è il trasposto di $\mathbf{b}$,

   (d) (se ciò è possibile) $\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}}$.

(a),(b) $$\left[\begin{array}{rrr|r|rrr} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R2 + R1 \to \\ R3 - R1 \to \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r|rrr} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R3 \to \\ R2/2 \to \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r|rrr} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} R1 - R3 \to \\ R2 - R3 \to \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

3. Data la funzione $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ $(x \in \mathbf{R})$, calcolare:

   (a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{0}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{0}$

   (b) $f'(x) = \boxed{-xe^{-\frac{1}{2}x^2}}$

   (c) $f''(x) = \boxed{(x^2-1)e^{-\frac{1}{2}x^2}}$

   (d) i punti stazionari di f e classificarli:

   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $f''(0) = -1 < 0$; $(0, 1)$ è max. relativo (e assoluto)

   (e) l'equazione della retta tangente al grafico della f nel punto $\left(1, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$:

   $$y - \frac{1}{\sqrt{e}} = f'(1)(x-1) = -\frac{1}{\sqrt{e}}(x-1); \quad y = \frac{2-x}{\sqrt{e}}$$

   (f) i punti di flesso della f:

   $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$; f'' cambia in ± 1 il segno da $\mp$ a $\pm$; $(1, \frac{1}{\sqrt{e}})$ è punto di flesso ascendente e $(-1, \frac{1}{\sqrt{e}})$ è punto di flesso discendente

   (g) il polinomio di Taylor della f di grado 2 e di centro 0:

   $$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 - \frac{1}{2}x^2$$

   (h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \boxed{\int_{-\infty}^0 e^t\,dt = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^t\,dt = \lim_{a\to-\infty}(e^0 - e^a) = 1}$

   (integrazione per sostituzione $t = -\frac{1}{2}x^2$). $dt = -x\,dx$

4. $$\int_0^2 \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{2x}}\,dx = \boxed{\int_0^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)dx = \left[2\sqrt{2}\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{2}}\right]_0^2 = 4 + \sqrt{2}}$$

5. $$\int_0^\pi \left(\frac{2}{\pi} + \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx = \boxed{\int_0^\pi \frac{2}{\pi}\,dx + \int_0^\pi \cos\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2 + \left[2\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^\pi = 4}$$

6. Calcolare la soluzione $y = y(x)$ del seguente problema di Cauchy, e precisare il suo dominio:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = (xy)^2 \\ y(1) = -3\,. \end{cases}$$

$y(x) = -\frac{3}{x^3} = -3x^{-3}$ dominio: $x > 0$

Se $y < 0$ (condizione iniziale), $\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int x^2\,dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = \frac{1}{3}x^3 + c$. Dalla condizione iniziale si ha $-\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}1^3 + c$, cioè $c = 0$. Ne segue che $y = -\frac{3}{x^3}$. Poiché $y = -\frac{3}{x^3} < 0$ otteniamo che $x > 0$.