C.d.L. in Tecniche Ortopediche
Prova di Analisi Matematica del 06/04/2018

Cognome: ______________________________

Nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Svolgere gli esercizi nelle facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Lo iodio isotopo ^{131}I è radioattivo e ha un tempo di dimezzamento di 8 giorni.

   (a) Siano presenti inizialmente N_0 atomi di ^{131}I. Determinare la costante di decadimento λ (in giorno^{-1} = d^{-1}) in modo tale che il numero $N(t)$ degli atomi presenti dopo il tempo t sia approssimativamente $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$.

   $$N_0 e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{1}{2} N_0 \Rightarrow e^{\lambda T_{1/2}} = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{8}\,\mathrm{d}^{-1} \approx 0{,}0866\,\mathrm{d}^{-1}$$

   (b) Di quale percentuale si riduce una data quantità di ^{131}I ogni giorno?

   $$\frac{N_0 e^{-\lambda(t+1\,\mathrm{d})}}{N_0 e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda\,\mathrm{d}} \Rightarrow 1 - e^{-\lambda\,\mathrm{d}} \approx \lambda \cdot \mathrm{d} \cdot 100\,\% \approx 8\,\%.$$

   (c) Calcolare il tempo necessario affinché una data quantità di ^{131}I si riduca al $12,5\%$ della quantità iniziale.

   $12,5\% = (\frac{1}{2})^3 \Rightarrow$ tempo necessario $= 3T_{1/2} = 24$ giorni.

2. Data la funzione $f(x) = x^2 \ln x, \quad x \in \mathbb{R},\ x > 0$,

   (a) determinare $\lim_{x\to 0^+} f(x) =$ 0, perché $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{(x^{-2})'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{2} = 0^-$

   (applicare la regola di de l'Hospital: $f(x) = \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}$)

   (b) calcolare $f'(x) =$ $(x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \ln x + x^2 \cdot \dfrac{1}{x} = x(1 + 2\ln x)$

   (c) calcolare $f''(x) =$ $1 \cdot (1 + 2\ln x) + x \cdot \dfrac{2}{x} = 3 + 2\ln x$

   (d) trovare e classificare il punto stazionario x_0 di f:

   $x_0 = e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$, si tratta di un punto di minimo locale (e assoluto)

   (e) calcolare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $(1, 0)$:

   $y = f(0) + f'(0)(x - 1) = x - 1$

   (f) calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 e di punto iniziale e:

   $$p_2(x) = f'(0)(x-1) + \frac{f''(0)}{2!}(x-1)^2 = x - 1 + \frac{3}{2}(x-1)^2 = \frac{3x^2 - 4x + 1}{2}$$

(g) trovare gli intervalli di convessità/concavità e il punto di flesso di f:

$f(x)$ è convessa $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3 + 2\ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e^{-\frac{3}{2}}$, cioè la f è concava per $0 < x \leq e^{-\frac{3}{2}}$, convessa per $x \geq e^{-\frac{3}{2}}$, flesso: $\left(e^{-\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2e^3}\right)$

(h) calcolare $\displaystyle\int_1^{\sqrt[3]{e}} x^2 \ln(x)\, dx$ (integrazione per parti):

$$\left[\frac{1}{3}x^3 \ln x\right]_1^{\sqrt[3]{e}} - \int_1^{\sqrt[3]{e}} \frac{1}{3}x^2\, dx = \frac{e}{9} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^{\sqrt[3]{e}} = \frac{e}{9} - \left(\frac{e}{9} - \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{9}$$

3. Calcolare

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(3x)\, dx = \left[\frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0\right) = \frac{1}{3}$

(b) $\displaystyle\int_1^{16} \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\, dx = \int_1^{16} x^{-\frac{3}{4}}\, dx = \left[4x^{\frac{1}{4}}\right]_1^{16} = 4\left[\sqrt[4]{x}\right]_1^{16} = 4 \cdot (2-1) = 4$

4. Per un circuito elettrico la determinazione della corrente y sull'induttanza in funzione del tempo x porta al seguente problema di Cauchy (trascurando le unità di misura):

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 9y = 90 \\ y(0) = 6\,. \end{cases}$$

(a) Si calcoli la soluzione del problema di Cauchy.

$y(x) = 10 - 4e^{-9x}$

(b) Si trovi il limite di $y(x)$ per $x \to +\infty$.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y(x) = 10^-$

Se $y < 10$ (divisione per $10-y$ e condizione iniziale), allora $\displaystyle\int_6^y \frac{1}{10-y}\, dy = \int_0^x 9\, dx \Rightarrow [-\ln|10-y|]_6^y = -\ln(10-y) + \ln(4) = 9x \Rightarrow \ln(10-y) = \ln(4) - 9x \Rightarrow 10 - y = e^{\ln(4)} \cdot e^{-9x} = 4e^{-9x} \Rightarrow y = 10 - 4e^{-9x}$.

5. Si consideri un circuito elettrico con due generatori di tensioni $E_1 = 3\,\mathrm{V}$, $E_2 = 4\,\mathrm{V}$ e tre resistenze $R_1 = 100\,\Omega$, $R_2 = 200\,\Omega$, $R_3 = 300\,\Omega$. Dalle leggi di Kirchhoff si è ottenuto il seguente sistema lineare per le correnti i_1, i_2, i_3:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_1 \\ E_1 + E_2 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcolare la soluzione del sistema lineare con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{1100} \\ \frac{4}{275} \\ -\frac{3}{220} \end{bmatrix} = \frac{1}{1100}\begin{bmatrix} 1 \\ 16 \\ -15 \end{bmatrix}$$

(b) Nel caso $R_1 = 0$, $R_2 \neq 0$, $R_3 \neq 0$, calcolare l'inversa della matrice dei coefficienti del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{R_2+R_3}{R_2R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \end{bmatrix}$$

(c) Dire se la matrice dei coefficienti è invertibile anche nel caso $R_1 = R_3 = 0$, $R_2 \neq 0$ e giustificare la risposta:

La matrice non è invertibile perché ha rango 2: infatti, la seconda matrice nel procedimento di (b) ha per $R_3 = 0$ solo due gradini.

(a)
$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 100 & 200 & 0 & 3 \\ 0 & 200 & -300 & 7 \end{array}\right] \; R2 - 100R1 \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 300 & 100 & 3 \\ 0 & 200 & -300 & 7 \end{array}\right] \; R3 - \tfrac{2}{3}R2 \to$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 300 & 100 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{1100}{3} & 5 \end{array}\right] \; \begin{array}{l} \frac{1}{300}R2 \to \\ -\frac{3}{1100}R3 \to \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{100} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{220} \end{array}\right] \; \begin{array}{l} R1 + R3 \to \\ R2 - \frac{1}{3}R3 \to \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & -\frac{3}{220} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{275} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{220} \end{array}\right] \; R1 + R2 \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{1100} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{275} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{220} \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1100} \\ \frac{4}{275} \\ -\frac{3}{220} \end{bmatrix}$$

(b)
$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \; R3 - R2 \to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -R_3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \; \begin{array}{l} R2/R_2 \to \\ R3/(-R_3) \to \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \end{array}\right] \; R1 + R2 + R3 \to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{R_2+R_3}{R_2R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \end{array}\right]$$