
La preparazione matematica delle matricole nelle università europee: risultati di un test

Rüdiger Achilles

Elaborazione dati:

Marco Di Girolami e Camilla Valentini

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna

Piazza di Porta S. Donato 5, 40126 Bologna

achilles@dm.unibo.it

Ringraziamenti. Questo articolo è in parte frutto di un lavoro collettivo. A una prima stesura hanno contribuito: James Blowey (Durham), Hubert Flenner (Bochum), Laura Guidotti (Bologna), Salomon Ofman (Paris 7), Mirella Manaresi (Bologna), Evangelia Samiou (Cipro), Brian Straughan (Durham) e Alekos Vidras (Cipro). Un ringraziamento va anche ai contributi di Peter Eichelsbacher (Bochum), Giuseppe Mulone (Catania), Stefan Schröer (Düsseldorf, già a Bayreuth), Bernd Siebert (Freiburg), Jean-Jacques Szczeciniarz (Paris 7, già a Bordeaux 3). Si ringraziano, infine, tutti i colleghi coinvolti nell'organizzazione del test e nella distribuzione del questionario.

Introduzione

Negli ultimi anni l'insegnamento della matematica a livello universitario ha subito profondi cambiamenti. Da una parte sempre più numerosi sono i *curricula* che presentano almeno un corso di matematica obbligatorio, dall'altra è sempre più piccola la percentuale di studenti che sceglie di studiare matematica o discipline che richiedano una buona preparazione matematica. Si percepisce una generale disaffezione, se non addirittura avversione, per le discipline scientifiche e in particolare per la matematica.

Sorge spontanea una domanda: gli studenti europei che si affacciano all'università sono adeguatamente preparati per seguire i corsi di matematica che incontreranno nei loro studi universitari? Malgrado la crescente importanza della matematica in tutte le scienze e in quasi tutti gli aspetti della vita umana, i docenti universitari hanno spesso l'impressione che gli studenti non abbiano familiarità con i necessari prerequisiti matematici e che questa

situazione sia in costante peggioramento. È solo una percezione soggettiva? Ci sono differenze significative tra Paese e Paese?

È ben noto che il grado di preparazione scientifica, in particolare matematica, degli studenti di un Paese ha un notevole impatto sulla competitività economica di quel Paese. Per questo motivo negli ultimi anni sono stati condotti diversi studi comparativi sulla alfabetizzazione matematica degli studenti, studi che presentano interesse non solo pedagogico ma anche economico e politico.

Nell'ambito del progetto europeo Socrates "Diffusion and improvement of mathematical knowledge in Europe" (in breve "Mathematics in Europe"), coordinato dalla prof. M. Manaresi del Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna e a cui partecipano le Università di Bochum (responsabile prof. H. Flenner), Cipro (responsabile prof. A. Vidras), Durham (responsabile prof. B. Straughan), Parigi 7 (responsabile prof. S. Ofman), è stato preparato un questionario a scelta multipla per provare a dare una risposta alle domande precedenti sulla preparazione matematica. Questo lavoro riporta i risultati del test a cui sono state sottoposte 3441 matricole di corsi di studio i cui *curricula* prevedevano almeno un corso di matematica obbligatorio. Il questionario è stato distribuito nel settembre/ottobre 2003, durante la prima settimana di frequenza ai singoli corsi.

È interessante confrontare i risultati ottenuti attraverso il nostro test con quelli ottenuti attraverso altri test progettati in modo totalmente diverso e che hanno interessato un numero molto più vasto di studenti. In questa nota si farà riferimento solamente a due importanti indagini comparative: "Trends in International Mathematics and Science Study" (TIMSS) e "OECD Programme for International Student Assessment" (PISA), per i cui risultati completi si rimanda rispettivamente a [12] e [11].

Nel 1999 i ministri dell'istruzione universitaria di 29 paesi europei hanno firmato a Bologna un documento (Dichiarazione di Bologna), che è stato il punto di partenza per un importante processo di armonizzazione dei vari sistemi europei di formazione universitaria noto come *Processo di Bologna*. I test di cui parleremo evidenziano che un analogo processo di armonizzazione sarebbe opportuno in Europa anche per l'istruzione secondaria, almeno per quanto concerne la matematica.

Il progetto e i suoi partner

Come abbiamo detto, il test rientra tra le iniziative previste dal progetto "Mathematics in Europe" finanziato dalla Comunità Europea nell'ambito del Programma Socrates. Per una migliore comprensione dei risultati del test è opportuna una breve presentazione delle università che partecipano al progetto.

Università di Bologna. L'Università di Bologna è una delle più grandi università italiane, avendo più di 100 000 iscritti. Fondata nel 1088, è certamente

la più antica in Europa. Per le sue tradizioni, la sua ottima fama e non ultimo per il vivace clima culturale della città di Bologna, attrae studenti da tutta Italia, ma soprattutto dalle regioni adriatiche dell'Italia, cioè da: Emilia-Romagna, Marche, Abruzzo, Puglia e Veneto. Gli studenti si iscrivono ai vari corsi di laurea dopo aver ottenuto il diploma di scuola media superiore, in generale senza prove di ammissione. Una delle poche eccezioni è costituita dal corso di Biotecnologie (a numero chiuso e con esame di ammissione). Nei tempi recenti l'Università ha costituito facoltà e corsi di laurea triennali e specialistici nelle vicine città di Cesena, Faenza, Forlì, Imola, Ravenna, Reggio Emilia e Rimini.

Università di Parigi 7 - Denis Diderot. L'Università di Parigi 7 si trova nel Île de France, la regione francese che ha la maggiore densità di istituzioni universitarie. Fondata nel 1970 come tredicesima delle diciassette università del Île de France, Parigi 7 fu intitolata nel 1994 a Denis Diderot. Parigi 7 ha circa 27.000 studenti ed è caratterizzata, fra le università parigine, da un alto grado di interdisciplinarietà. Gli studenti che vogliono studiare matematica devono avere il Baccalauréat Scientifique (Bac S). Dal 2004-2005 l'Università di Parigi 7 ha organizzato l'offerta formativa adeguandosi allo schema europeo: Licences-Masters-Ecoles doctorales.

Ruhr-Università di Bochum. L'Università di Bochum è stata la prima università fondata nella Repubblica Federale Tedesca nel dopoguerra. Dal 1965, anno di apertura, ad oggi l'Università di Bochum si è sviluppata rapidamente e oggi ha circa 32.000 studenti provenienti per la maggior parte dalla regione della Ruhr, alla cui riconversione industriale ha contribuito in modo decisivo. L'Università di Bochum offre una vasta gamma di percorsi formativi ed è stata tra le prime università tedesche che hanno introdotto lo schema europeo: Bachelor, Master e Doktorat.

Università di Cipro. A Cipro l'istruzione universitaria si è sviluppata soprattutto dal 1960, anno in cui il Paese ha ottenuto l'indipendenza. L'Università di Cipro è stata fondata nel 1991 ed è l'unica università statale nella Repubblica Cipriota. Ogni anno sono ammessi all'università circa 550 studenti, quasi tutti dopo il superamento di esami di ammissione stabiliti dal Ministero dell'Istruzione e della Cultura. Si noti che l'università programma in modo autonomo il numero degli studenti per ciascuna facoltà, per cui, in generale, gli studenti concorrono per un posto nel corso di studi di loro scelta.

Nell'anno accademico 2003/2004 è stata attivata la Scuola di Ingegneria. L'ammissione a tale Scuola richiede un punteggio minimo negli esami di ammissione, punteggio non richiesto, invece, per la Scuola di Scienze.

Una particolarità dell'Università di Cipro sta nel fatto che gli studenti maschi entrano all'università dopo 26 mesi di servizio militare nella Guardia Nazionale, mentre le studentesse iniziano l'università immediatamente dopo l'esame di maturità.

L'Università di Durham. L'Università di Durham, fondata nel 1832, è la terza università più antica di Inghilterra. L'università è organizzata in colleges ed è situata nella città di Durham e nella vicina Stockton.

L'ammissione alle università inglesi è selettiva, sulla base di punteggi detti A-level (Advanced level) o Scottish Higher e di un colloquio. In Inghilterra tali A-level sono certificati da tre enti esaminatori (examination boards: si vedano i siti web [2], [3], [4]) e sono stabiliti da questi enti con l'approvazione della Qualifications and Curriculum Authority (QCA). Gli studenti svolgono gli esami nelle loro scuole secondarie ma vengono valutati dai tre enti esaminatori, che assegnano al superamento della prova i voti A, B, C, D, E, dove A è il massimo, e a cui corrispondono i punteggi 120, 100, 80, 60, 40, rispettivamente. In matematica gli A-level sono basati su sei moduli scelti fra 7 di Matematica Pura, 6 di Fisica, 6 di Statistica e 2 di Matematica Discreta. Ci sono molte combinazioni possibili, ma circa la metà delle domande sono di Matematica Pura, incluse anche le derivate, gli integrali e semplici equazioni differenziali, vedi [6].

La domanda per entrare in una università inglese va fatta tramite l'Universities & Colleges Admissions Service (UCAS), vedi <http://www.ucas.ac.uk>. Gli studenti scelgono le università, che a loro volta fanno un'offerta condizionata dal raggiungimento di un punteggio minimo di A-level. L'offerta standard dell'Università di Durham è di AAB = 340 punti, che è fra le più alte in Inghilterra, come risulta dalla Figura 1, che raffigura quante sono le università inglesi che hanno un certo punteggio minimo di entrata. Se uno studente non raggiunge il punteggio minimo di entrata delle università scelte, gli può venire assegnato dall'UCAS uno dei posti rimasti liberi.

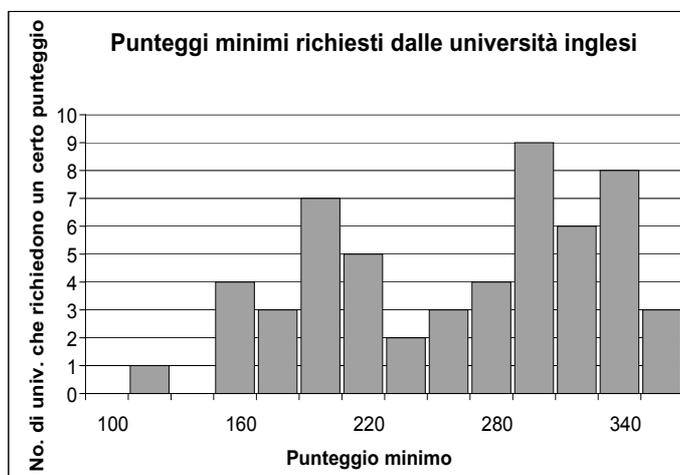


Fig. 1. Numero di università inglesi e loro punteggi di entrata

Le statistiche sul numero di domande degli studenti, con incluso alcuni dati rilevanti (età, punteggi, ecc.), si possono trovare sul sito web dell'UCAS all'indirizzo <http://www.ucas.ac.uk/figures/>, da cui è stata estratta anche la Figura 1.

Altre università che hanno preso parte al test. Grazie ai contatti scientifici di alcuni membri del progetto sono stati inseriti nel test gruppi di studenti di altre università: in Germania dell'Università di Bayreuth (che, fondata nel 1975, è la più giovane università tedesca con oltre 9.000 studenti provenienti da tutta la Germania) e della Albert-Ludwig Università di Friburgo (che, fondata nel 1457, conta circa 21.500 studenti), in Francia dell'Università di Bordeaux 3 Michel de Montaigne (che, fondata nel 1441, riformata nel 1968-1970, ha circa 15.000 studenti prevalentemente in scienze sociali e umanistiche) e in Italia dell'Università di Catania (che, fondata nel 1434, ha circa 14.000 studenti, principalmente siciliani).

Differenze fondamentali nei sistemi di formazione dei cinque paesi partner

L'istruzione secondaria nei paesi partner presenta grandi differenze. Per una informazione dettagliata sui sistemi educativi europei si può consultare il data base EURYDICE, EURYBASE [1].

Il numero delle ore di matematica negli ultimi tre anni della scuola secondaria e i programmi di matematica svolti sono particolarmente importanti nel nostro contesto. Già si presentano differenze significative a seconda dei vari tipi di scuola in ciascun Paese, ad esempio in Italia e in Francia. Per ciascuno dei paesi partner la Tabella 1 dà informazioni sull'età di ammissione all'università, sul numero degli anni di studio richiesti e se è previsto un concorso di ammissione. I dati della terza colonna si riferiscono unicamente alle università partner e non si esclude che altre università dei paesi partner si regolino in maniera differente.

Table 1. Sistemi di istruzione

Paese	Età minima di iscrizione	Numero di anni di scuola precedenti	Ammissione per concorso
Italia	19	13	no
Germania	19	13	no
Inghilterra	18	13	sì
Cipro	18	12	sì
Francia	18	12	no

Di fatto l'età media degli studenti che entrano nelle università è a volte più alta rispetto ai valori riportati per vari motivi: servizio militare, ripetizione

di anni scolastici, studenti lavoratori. Si noti che nel Regno Unito i bambini iniziano la scuola a cinque anni.

In quasi tutti i paesi partner gli studenti possono optare per un curriculum che preveda un livello avanzato di preparazione matematica o scegliendo un particolare tipo di scuola o scegliendo corsi avanzati all'interno del tipo di scuola prescelto. Ad esempio gli alunni di un "lycée d'enseignement général et technologique" francese, alla fine della seconda classe, comune a tutti, scelgono il tipo di baccalaureato: uno dei tre tipi generali (economico-sociale "Bac ES", letterario "Bac L" o scientifico "Bac S") o uno dei sette tipi tecnologici. In Germania il curriculum è molto diverso a seconda del tipo di istruzione secondaria superiore. Gli allievi del "Gymnasiale Oberstufe" devono studiare materie di tre gruppi (lingue, letteratura e belle arti; scienze sociali; matematica/scienze naturali/tecnologie) e possono scegliere un corso avanzato di matematica. In Inghilterra non ci sono materie obbligatorie a livello secondario superiore. Gli studenti possono scegliere materie nell'ambito dell'offerta della scuola o di altre istituzioni educative a seconda della qualificazione che cercano. In Italia, invece, la preparazione matematica degli studenti dipende essenzialmente dal tipo di scuola secondaria frequentata, la cui scelta avviene all'età di 14 anni. Ci sono molti tipi di scuole secondarie superiori: Licei (classico, scientifico, linguistico, artistico, psico-pedagogico), Istituti Tecnici, Istituti professionali, che danno una formazione matematica molto diversa. Una volta superato l'esame di stato finale, lo studente italiano può iscriversi alla facoltà che preferisce, indipendentemente dai propri studi secondari.

Scopo e predisposizione del questionario

Lo scopo del test era quello di valutare i livelli di conoscenza matematica degli studenti dei paesi partner e confrontarli per:

- stimolare la discussione sui programmi di matematica della scuola secondaria superiore in ciascuno dei paesi partecipanti al progetto;
- dare suggerimenti per l'insegnamento della matematica nel primo anno di università;
- poter proporre eventuali modifiche ai programmi dei corsi universitari che possano facilitare la mobilità degli studenti che desiderano passare periodi di studio all'estero in uno dei paesi partner.

Proprio per le diversità dei diversi sistemi educativi non era facile disegnare un test che prendesse in esame le conoscenze matematiche comuni nei diversi paesi partner. Ci si è accordati su un test che riflettesse le conoscenze e le capacità matematiche che uno studente di matematica, scienze o ingegneria dovrebbe avere nel momento di ingresso nell'università. Queste comprendono:

- comprensione delle proprietà fondamentali delle funzioni elementari (funzioni trigonometriche, logaritmiche, esponenziali), capacità di derivare e integrare queste funzioni e le loro combinazioni;

- logica di base e comprensione delle operazioni logiche come negazione, implicazione, equivalenza, ecc.;
- uso corretto delle formule e delle tecniche algebriche standard;
- comprensione delle tecniche geometriche elementari e capacità di risolvere problemi geometrici elementari di geometria piana.

Si è disegnato il test A costituito da 14 domande focalizzate su sette ambiti fondamentali con due domande per argomento (si veda sotto). Dal Syllabus della Unione Matematica Italiana [9] sono state prese le domande 1, 2, 3, 4, 5, 8, e 9 e le altre domande sono state basate su un test orientativo svolto in passato per gli studenti di ingegneria di Durham. Le domande del questionario, raggruppate per argomento, sono state le seguenti:

Logaritmi e funzione esponenziale (domande 2 e 9)

2. La soluzione dell'equazione $\log_2(\log_3 x) = 3$ è
 - a) $x = 3$
 - b) $x = 3^4$
 - c) $x = 3^6$
 - d) $x = 3^9$
 - e) nessuna delle risposte suddette è corretta
9. Il numero $\sqrt{0,9}$ è uguale a
 - a) 0,3
 - b) 0,81
 - c) un numero fra 0,81 e 0,9
 - d) un numero fra 0,9 e 1
 - e) nessuna delle risposte suddette è corretta

Equazioni e disequazioni (domande 4 e 11)

4. La disuguaglianza $\frac{x^2-1}{x} > 0$ vale
 - a) per ogni $x \neq 0$
 - b) solo per $x > 1$
 - c) solo per $x < -1$
 - d) solo per $x < -1$ e per $x > 1$
 - e) nessuna delle risposte suddette è corretta
11. Le frazioni $\frac{3}{7} + \frac{1}{8}$ e $\frac{1}{\sqrt{3}-1} + \frac{1}{\sqrt{3}+1}$ (di cui la seconda espressa nella forma $m+n\sqrt{3}$) sono uguali a
 - a) $4/5$ e $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ rispettivamente
 - b) $31/56$ e $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ rispettivamente
 - c) $4/5$ e $\sqrt{3}$ rispettivamente
 - d) $31/56$ e $\sqrt{3}$ rispettivamente
 - e) nessuna delle risposte suddette è corretta

Logica (domande 1 e 8)

1. Il prodotto di sette numeri interi è negativo. Questo implica che
 - a) tutti i sette numeri sono negativi
 - b) uno è negativo e gli altri sono positivi
 - c) tre sono negativi e gli altri sono positivi
 - d) cinque sono negativi e gli altri sono positivi
 - e) nessuna delle risposte suddette è corretta
8. La frase "non è vero che tutti gli studenti sono diligenti" è equivalente alla frase
 - a) tutti gli studenti non sono diligenti
 - b) almeno uno studente non è diligente
 - c) nessuno studente è diligente
 - d) almeno uno studente è diligente
 - e) nessuna delle risposte suddette è corretta

Calcolo differenziale (domande 6 e 13)

6. La funzione $y = 36x - 3x^2 - 2x^3$ assume
 - a) in -2 minimo relativo -68 e in 3 massimo relativo 27

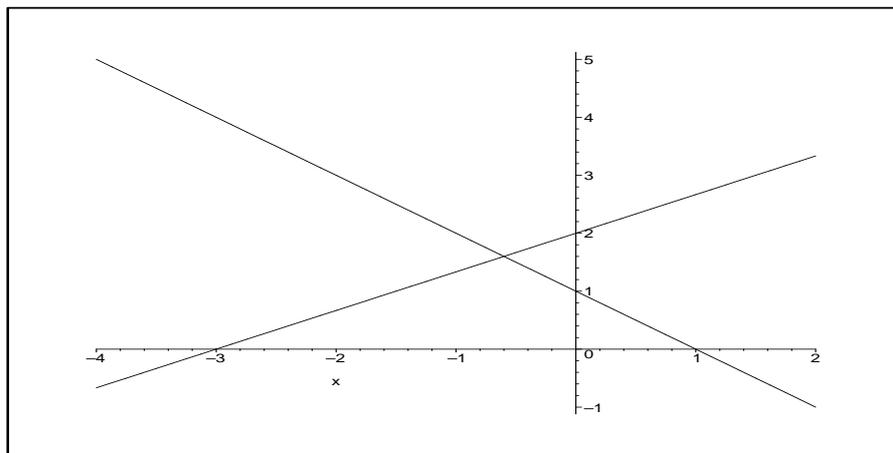
- b) in 2 minimo relativo 44 e in -3 massimo relativo -81
 c) in 2 massimo relativo 44 e in -3 minimo relativo -81
 d) in -2 massimo relativo -68 e in 3 minimo relativo 27
 e) nessuna delle risposte suddette è corretta
13. La derivata di $(1 - x^2)\ln(1 - x^2)$ rispetto ad x è
 a) $-2x + 2x \ln(1 - x^2)$ b) $2x - 2x \ln(1 - x^2)$
 c) $-2x + 2x^2 \ln(1 - x^2)$ d) $1 - 2x \ln(1 - x^2)$
 e) nessuna delle risposte suddette è corretta

Calcolo integrale (domande 7 e 14)

7. Utilizzando l'integrazione per parti, l'integrale $\int_0^\pi x \sin x \, dx$ è
 a) $\frac{1}{2} \sin(\pi^2)$ b) -2 c) $-\pi$ d) 0
 e) nessuna delle risposte suddette è corretta
14. L'integrale $\int_{-2/3}^{-1/3} (3x + 2)^n \, dx$ ($n > 1$) è
 a) $\frac{1}{n+1}$ b) $\frac{3}{n}$ c) $\frac{1}{3(n-1)}$ d) $\frac{1}{3(n+1)}$
 e) nessuna delle risposte suddette è corretta

Geometria (domande 5 e 12)

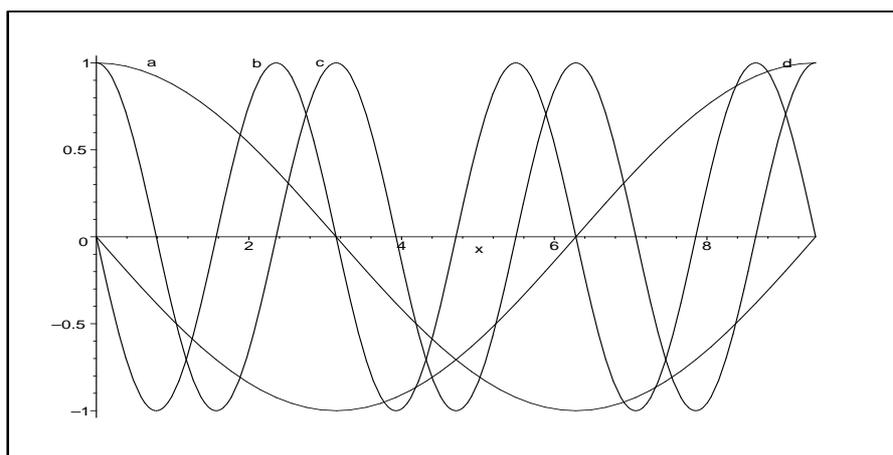
5. Un triangolo ABC ha in B e C angoli di 30° e due lati di 40 cm. L'altezza rispetto al lato BC è uguale a
 a) $10\sqrt{3}$ cm b) 20 cm c) $20\sqrt{3}/3$ cm d) 80 cm
 e) nessuna delle risposte suddette è corretta
12. Le due rette nel grafico (Fig. 2) si intersecano in

**Fig. 2.** Grafico della domanda 12

- a) $x = -1$ e $y = 2$ b) $x = -2/3$ e $y = 5/3$
 c) $x = -3/5$ e $y = 8/5$ d) $x = -11/20$ e $y = 31/20$
 e) nessuna delle risposte suddette è corretta

Trigonometria (domande 3 e 10)

3. L'equazione $\sin(2x) = 2 \sin x$ vale
- per ogni x
 - solo per $x = 2k\pi$ dove k è un intero arbitrario
 - solo per $x = k\pi$ dove k è un intero arbitrario
 - per nessun valore di x
 - nessuna delle risposte suddette è corretta
10. Quale dei seguenti grafici (Fig. 3) a) b) c) d) e) nessuno di questi

**Fig. 3.** Grafico della domanda 10

è quello della funzione $\sin(2x + \pi/2)$?

Le domande del test sono state formulate con queste intenzioni:

- misurare la capacità di comprensione e le abilità di calcolo;
- cercare di ridurre la possibilità degli studenti di “tirare a indovinare” introducendo l’opzione “nessuna delle risposte suddette è corretta”;
- vedere se gli studenti cadono in errori comuni;
- non richiedere l’uso della calcolatrice;
- prevedere una semplice crocetta come modalità di risposta;
- affrontare i sette argomenti differenti già nelle prime sette domande.

Il tempo previsto per la risposta del test a scelta multipla (esattamente una risposta corretta su cinque possibilità) era di cinquanta minuti. Le domande del test sono state presentate agli studenti con ordinamenti diversi, per cui, oltre alla versione A c’era una seconda versione B, ottenuta invertendo l’ordine delle domande.

Il test A è stato usato a Cipro, in Inghilterra e in Germania. In quest’ultimo Paese è stato usato anche il test B, ma solo nell’Università di Bayreuth e

le due versioni del test hanno dato risultati diversi: le risposte corrette per la versione A (distribuita a 109 studenti) sono state il 45%, mentre per la versione B (distribuita a 112 studenti) sono state il 52%. In Francia le domande sono state presentate nell'ordine 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14. In Italia, pur rispettando i criteri visti sopra, le domande sono state presentate in ordine crescente di (presunta) difficoltà: 1, 7, 9, 6, 2, 12, 13, 3, 4, 10, 5, 8, 11, 14. Questa scelta è stata suggerita da alcuni docenti preoccupati che gli studenti fossero scoraggiati dalle domande difficili all'inizio del questionario. Si è visto poi che questa presunta difficoltà non rifletteva le difficoltà reali percepite dagli studenti.

In Inghilterra e in Germania è stato detto esplicitamente che per ogni domanda c'era una sola risposta corretta tra le scelte possibili, mentre in Italia questo è stato comunicato solo ad alcuni gruppi di studenti.

Sfortunatamente la collaborazione con i colleghi S. Mignani e R. Ricci del Dipartimento di Scienze Statistiche dell'Università di Bologna è iniziata solo dopo che il questionario era stato preparato e già parzialmente distribuito. Dobbiamo comunque ringraziare questi colleghi per l'analisi accurata dei risultati e per l'esame critico del questionario, che sono sintetizzati nel loro articolo [8] nel presente volume. Applicando tecniche di Item Response Theory, Mignani e Ricci hanno messo in evidenza che il questionario aveva un basso potere discriminante per basse abilità degli studenti.

I partecipanti al test, la raccolta dei dati e i risultati

Hanno partecipato al test 3441 studenti di matematica, fisica, informatica, scienze biologiche e naturali, astronomia, della Facoltà di Ingegneria e di altre Facoltà in cui vi sono corsi di servizio di matematica. Il numero degli studenti varia sensibilmente fra Paese e Paese e da università e università: 316 per Bochum, 221 per Bayreuth, 350 per Friburgo, 196 studenti per l'Università di Cipro, 392 per quella di Durham, 46 per Parigi VII, 60 per Bordeaux, 1648 per Bologna, 275 per Catania. Gli studenti dell'Università di Bologna sono in numero notevole (nonostante la mancata presenza degli studenti di Ingegneria, che non hanno potuto partecipare al test in quanto già impegnati in un test attitudinale previsto dalla Facoltà) e uno studio statistico molto dettagliato è stato condotto sulle loro risposte, si veda la Tabella 3.

I dati raccolti hanno permesso di fare confronti basati sulle singole domande e/o sui singoli corsi di laurea. C'erano poi informazioni aggiuntive, non disponibili per tutti i paesi partner. Ad esempio, le università di Cipro, di Durham e le università tedesche hanno elaborato i loro risultati anche in base al genere degli studenti. I risultati non hanno mostrato differenze significative in base al genere. Inoltre i dati tedeschi contenevano l'informazione se lo studente avesse frequentato nella scuola secondaria un corso di matematica di base oppure avanzato. Nei dati francesi e italiani si faceva distinzione fra risposte sbagliate e risposte non date.

I risultati del test sono riportati nella Tabella 2.

Table 2. I risultati del test

Disciplina	Risposte corrette (in %)			
	Italia	Germania	Inghilterra	Cipro Francia
Fisica	57,2 47,0 (Catania)			42,0
Scienze		32,4 49,0 (Bayreuth) 47,5 (Friburgo)		55,1
Scienze dell'Inform.	54,3 (Cesena)			49,9
Matematica	48,8 42,1 (Catania)	45,2 47,9 (Friburgo)	67,0	55,6
Ingegn. Telematica	45,5 (Catania)	37,5	56,3	46,9
Chimica Industriale	48,6 22,1 (Faenza)			
Conservazione dei Beni Culturali	44,8			
Biotecnologie	43,9			
Scienze Statistiche	40,9			
Chimica e Chimica dei Materiali	40,4			46,1
Astronomia	39,8			
Informatica	38,6			
Chimica e Tecnologia Farmaceutiche	36,7			
Architettura	36,6 (Catania)			
Farmacia	33,0			
Tec. Chim. Amb.				
Gestione Rifiuti	32,5 (Rimini)			
Scienze di Internet	31,3			
Economia	29,4			
Scienze Naturali	26,6		61,3	
Scienze Biologiche	25,8			
Agraria	22,4 (Imola)			
Agraria	10,4			
Altro		31,9 51,7 (Friburgo)	54,6	
Storia della Scienza e Logica (Bordeaux)				21,4

I risultati mostrano un'impressionante disparità fra le abilità matematiche degli studenti delle università che richiedono un esame di ammissione e gli studenti delle università ad accesso libero. Fra quelle con esame di ammissione l'Università di Durham ha ottenuto il punteggio più alto con 61% di risposte

corrette sul campione totale e precisamente 67% di risposte corrette dagli studenti di matematica, 56% dagli studenti di ingegneria e 55% dagli altri corsi di laurea.

Va ricordato che nelle università inglesi si entra per concorso presentando un buon punteggio negli A-level o negli Scottish Higher. Infatti, solo 11 dei 392 studenti sottoposti al test sono entrati pur non avendo il punteggio minimo richiesto e gli studenti di matematica di Durham avevano (con 340) un punteggio immediatamente inferiore a quello massimo raggiungibile per tre A-levels che è 360, cioè tre voti A. Per questo motivo si può dire con certezza che gli studenti di matematica di Durham sono un gruppo omogeneo di ottimi studenti. Analogamente nell'Università di Cipro si entra per concorso e per l'ammissione alla Scuola di Ingegneria è necessario un certo punteggio nell'esame di ammissione.

Le università degli altri quattro paesi hanno avuto risultati inferiori senza particolari differenze: gli studenti di Matematica risultano o i migliori o comunque nel gruppo dei migliori. Questo potrà essere un fattore che favorisce la mobilità degli studenti di matematica fra i paesi partner.

Vale la pena osservare che quasi due terzi degli studenti di altri corsi di laurea hanno una preparazione di matematica insufficiente, pur avendo bisogno di strumenti matematici nella loro disciplina.

Per le università tedesche si può osservare che gli studenti, che hanno frequentato un corso avanzato di matematica nella scuola secondaria, superano nettamente gli studenti che hanno frequentato solo un corso di base (con un margine di circa 10% di risposte corrette).

La Tabella 3 mostra i corsi di laurea dell'Università di Bologna raggruppati in clusters. Gli studenti di Matematica e quelli di Biotecnologie sono nel primo gruppo; si noti che il corso di Biotecnologie è l'unico fra quelli indicati nella Tabella 3 ad essere a numero chiuso. È interessante notare che i corsi di laurea che rientrano nel cluster con il punteggio più basso presentano anche punteggi peggiori in ogni singola domanda eccetto l'ultima.

Esaminando i risultati degli studenti di Matematica domanda per domanda (si vedano Tabella 4 e Figura 4) si nota che in tutti i paesi partner gli studenti hanno difficoltà soprattutto in trigonometria (domande 3 e 10), nel calcolo differenziale (domanda 6 o domanda 13 a secondo del Paese) e nel calcolo integrale (domande 7 e 14). In genere gli studenti hanno avuto migliori risultati dove era richiesta soprattutto capacità di calcolo (domanda 11).

Confronto con le indagini PISA e TIMSS

Per quanto il nostro test sia basato su un campione limitato, vale la pena confrontarlo con PISA e TIMSS, indagini di grande respiro per la valutazione delle competenze matematiche e scientifiche degli studenti.

PISA (Programme for International Student Assessment) è un'indagine internazionale promossa dall'Organizzazione per la Cooperazione e lo Sviluppo

Table 3. Risultati di Bologna aggregati in clusters

Discipline	Risposte corrette (in %)
Fisica	57,2
Scienze dell'Informazione (Cesena)	54,3
Matematica	48,8
Chimica Industriale (Bologna)	48,6
Conservazione dei Beni Culturali	44,8
Biotecnologie	43,9
Scienze Statistiche (Bologna)	40,9
Chimica e Chimica dei Materiali	40,4
Astronomia	39,8
Informatica (M-Z)	38,6
Chimica e Tecnologia Farmaceutiche	36,7
Farmacia	33,0
Tecnologie Chimiche per l'Ambiente e per la Gestione dei Rifiuti	32,5
Scienze di Internet	31,3
Economia	29,4
Scienze Naturali	26,6
Scienze Biologiche	25,8
Agraria Verde Ornamentale (Imola)	22,4
Chimica Industriale (Faenza)	22,1
Agraria	10,4

Table 4. Risultati degli studenti di matematica in ogni singola domanda

Università	Numero di studenti	Risposte corrette (in %) per le domande:						
		No.1	No.2	No.3	No.4	No.5	No.6	No.7
Bologna	74	51	57	18	55	64	36	18
Bochum	54	63	37	31	7	48	63	24
Friburgo	107	79	27	24	16	44	52	20
Durham	105	79	65	39	22	76	77	56
Cipro	38	39	81	47	39	78	28	31
Parigi 7	46	63	93	61	76	22	72	61
Totale	424	67	55	34	32	57	57	35
		No.8	No.9	No.10	No.11	No.12	No.13	No.14
Bologna	74	95	42	26	86	65	49	23
Bochum	54	87	69	24	65	59	31	24
Friburgo	107	92	77	51	65	58	32	35
Durham	105	94	83	54	92	78	52	70
Cipro	38	81	39	42	94	78	81	39
Parigi 7	46	80	54	43	37	24	57	28
Totale	424	90	65	42	75	62	47	40

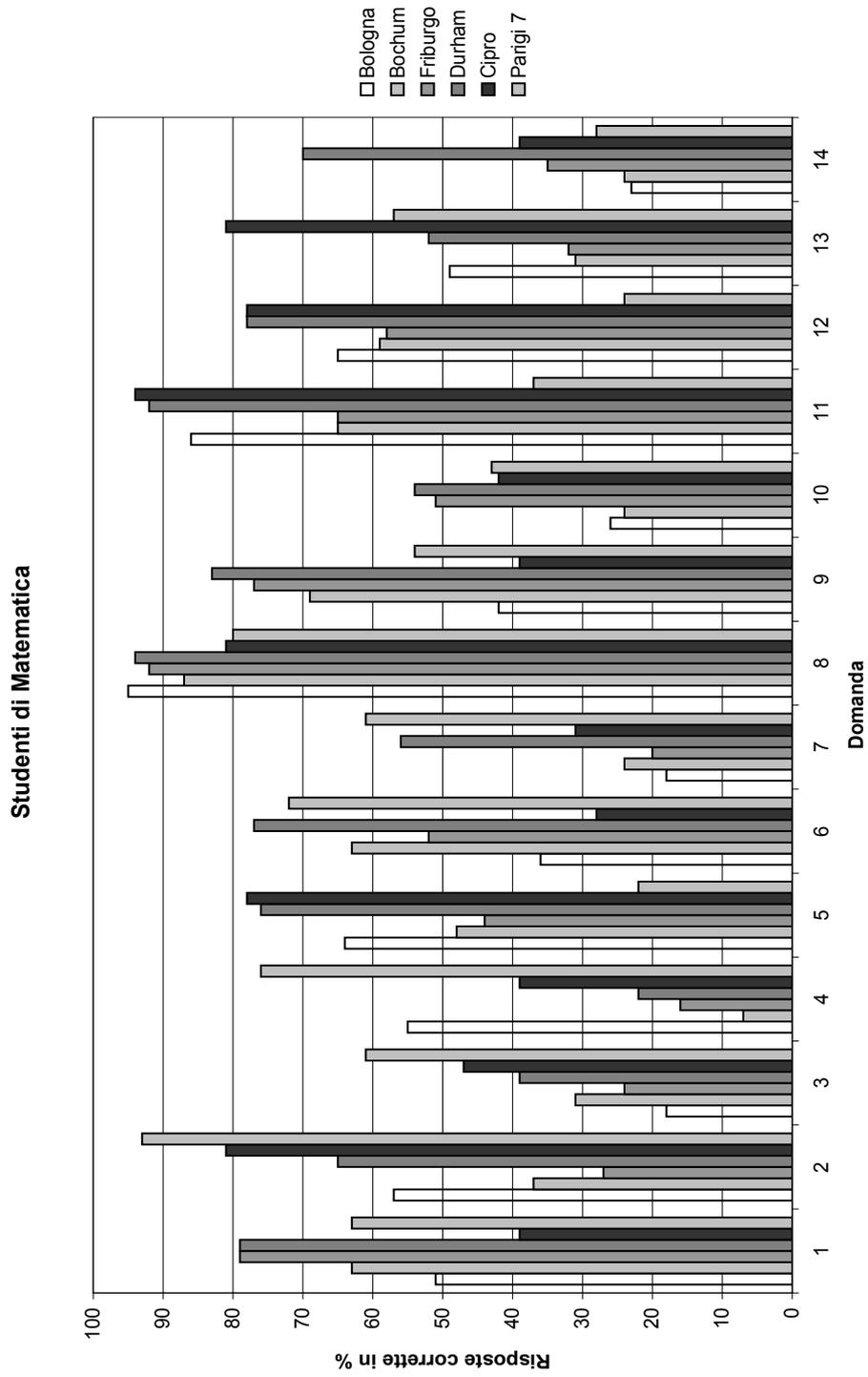


Fig. 4. Risultati degli studenti di matematica in ogni singola domanda

Economico (OCSE) per accertare conoscenze e capacità dei quindicenni scolarizzati con periodicità triennale e consentire un monitoraggio del sistema dell'istruzione. PISA (si veda [11]) ha l'obiettivo di verificare in che misura i giovani che escono dalla scuola dell'obbligo abbiano acquisito alcune competenze giudicate essenziali per svolgere un ruolo consapevole e attivo nella società e per continuare ad apprendere per tutta la vita (*lifelong learning*). La prima indagine PISA nel 2000 [7] era focalizzata sulla lettura; la seconda nel 2003 [5] era focalizzata sulla matematica e sul *problem-solving*.

Nel 2000 presero parte all'indagine circa 265.000 studenti di 32 paesi (compresi tutti i partner del nostro progetto eccetto Cipro); per la matematica, ambito secondario di PISA 2000, una particolare enfasi fu posta sui concetti di *cambiamento e relazione* e di *spazio e forma*. Si scelsero questi per poter includere una vasta gamma di percorsi scolastici senza dare troppo peso alle abilità di calcolo.

Nel 2003 parteciparono a un test di due ore nelle loro scuole ben più di 250.000 di studenti di 41 paesi per valutare le loro competenze in matematica, lettura, scienze e problem-solving. Furono coinvolti tutti i 30 paesi OCSE e altri 11 paesi partner; per la Gran Bretagna il test 2003 non fu ritenuto attendibile per il basso tasso di risposte e Cipro non partecipò.

I risultati sulla matematica di PISA 2003 sono disponibili in [5], [11]. Essi riguardano quattro aree specifiche: "spazio e forma", "cambiamenti e relazioni", "quantità", "incertezza". Esiste poi un risultato complessivo riportato nella Tabella 5 per i soli paesi partner.

Table 5. PISA: punteggi di matematica dei paesi partner

	Punteggio medio	Errore standard	Posizione superiore	Posizione inferiore
PISA 2000				
Regno Unito	529	(2,5)	6	10
Francia	517	(2,7)	10	15
Media OCSE	500			
Germania	490	(2,5)	20	22
Italia	457	(2,9)	26	28
PISA 2003				
Francia	511	(2,5)	11	15
Media OCSE	500			
Germania	503	(3,3)	14	18
Italia	466	(3,1)	25	26

Si deve osservare che sette paesi OCSE (tra cui l'Italia) hanno ottenuto risultati analoghi nelle diverse aree, mentre per undici paesi (fra cui Francia e Germania) ci sono grandi differenze tra i risultati per le varie aree. La Tabella 5 conferma sostanzialmente i risultati del nostro test. Infatti,

nell'indagine PISA 2000 la Gran Bretagna ha superato la Francia, la Germania e l'Italia in quest'ordine. Un confronto delle due indagini PISA 2000 e 2003 mette in luce la sostanziale invarianza della classifica: si osserva un miglioramento piccolo ma degno di nota della Germania nell'area della matematica.

PISA definisce la competenza matematica come la capacità di un individuo di identificare e comprendere il ruolo che la matematica gioca nel mondo reale, di operare valutazioni fondate e di utilizzare la matematica e confrontarsi con essa in modi che rispondono alle esigenze della vita quotidiana. Di conseguenza non interessa vedere se gli studenti abbiano appreso determinate nozioni e abilità, ma se padroneggino e siano in grado di utilizzare le conoscenze e le abilità acquisite.

Il nostro test invece è stato progettato per valutare le conoscenze e le abilità matematiche così come sono insegnate a scuola (si veda all'inizio del paragrafo "Scopo e predisposizione del questionario"). Un'altra differenza è che gli studenti del progetto PISA avevano circa 15 anni mentre il nostro test si rivolgeva a gruppi di studenti matematicamente più maturi e già selezionati dal loro interesse per l'università.

PISA mostra che all'età di quindici anni nella maggior parte dei paesi le prestazioni matematiche dei maschi sono migliori, soprattutto al livello più elevato della scala, mentre in generale la differenza di sesso non è significativa. Quando si interpretano le differenze osservate bisogna tenere conto che in molti paesi il sesso e il tipo di scuola, i *curricula* e i corsi scelti sono correlati. Dai risultati del nostro test, invece, non emergono differenze dovute al sesso.

Il TIMSS (Trend in International Mathematics and Science Study, già noto come il Third International Mathematics and Science Study; si veda [12]) è un progetto di ricerca promosso dalla IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement) e ha lo scopo di fornire ai politici, agli educatori, ai ricercatori ed agli operatori del settore, informazioni sui risultati di apprendimento in contesti educativi specifici. Il TIMSS si basa su rilevazioni quadriennali degli apprendimenti di matematica e scienze soprattutto degli studenti al quarto e all'ottavo anno di scolarità (corrispondente alla IV classe della primaria e alla III media italiana rispettivamente). Dalla prima rilevazione nel 1995 fino a quella più recente nel 2003 sono stati coinvolti circa 50 paesi e studenti del terzo, quarto, settimo, ottavo anno di scolarità e dell'ultimo anno della scuola secondaria. I contenuti matematici delle indagini TIMSS riguardavano frazioni e il senso dei numeri, misure, rappresentazione ed analisi di dati e probabilità, geometria e algebra.

I dati dell'indagine TIMSS 2003 relativi ai paesi partner sono stati riportati nella Tabella 6. Si noti che la Francia e la Germania non hanno partecipato alla rilevazione. Anche in questo caso l'Inghilterra è tra i migliori, ma è interessante ad osservare che l'Italia è leggermente al di sopra delle medie internazionali mentre nell'indagine PISA è notevolmente al di sotto della media internazionale.

Per i dettagli sui risultati di PISA e TIMSS, riguardanti anche le indagini per aree geografiche e per tipo di scuola, il lettore interessato può con-

Table 6. TIMSS 2003: punteggi di matematica dei paesi partner

Punteggio (errore standard)	
4° anno di scolarità	
Inghilterra	531 (3,7)
Cipro	510 (2,4)
Italia	503 (3,7)
Media internazionale	495(0,8)
8° anno di scolarità	
Inghilterra*	498 (4,7)
Italia	484 (3,2)
Media internazionale	467(0,5)
Cipro	459 (1,7)

* Procedura di campionamento delle classi non approvata

sultare il sito web dell'Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema dell'Istruzione [10].

Conclusioni

Pur non dando risposte definitive, i risultati del test danno informazioni significative sul livello delle conoscenze matematiche delle matricole universitarie. Gli studenti dell'Università di Durham (una delle migliori università britanniche) hanno ottenuto il punteggio più alto, ma il test non permette una classifica precisa degli altri paesi partner del progetto. Sono state evidenziate difficoltà in trigonometria, nelle derivate e negli integrali. Va però notato che in alcuni paesi partner il calcolo differenziale e integrale non fa parte dei programmi scolastici di tutti i tipi di scuola (come sarebbe auspicabile), ma solo in alcuni. Per facilitare la mobilità degli studenti è quindi della massima importanza rendere uniformi le conoscenze matematiche di base in tutti i paesi europei. Dalla Tabella 4 si possono dedurre le eventuali difficoltà degli studenti che desiderino passare all'estero un periodo di studio; la Tabella potrà quindi essere utile a coloro che progettano i curricula del primo anno di università.

Il test non esamina tutti gli aspetti dei programmi scolastici nei paesi partner, ad esempio uno studente inglese potrebbe entrare all'università conoscendo già elementi di meccanica razionale, cosa che non succede per nessuno degli altri partner.

I risultati del test indicano che gli studenti che non hanno frequentato un corso avanzato di matematica nella scuola secondaria potrebbero trovarsi in forte disagio andando a studiare matematica o scienze in un altro Paese europeo.

Nel settembre/ottobre 2004 il test è stato ripetuto nelle Università di Cipro (su un campione di 230 studenti) in quella di Durham (con un campione di 361 studenti) e in quella di Bochum: sono stati essenzialmente confermati i risultati del 2003, anche se gli studenti di Durham hanno raggiunto un punteggio leggermente più alto (65% rispetto al 61% del 2003). Questo aumento percentuale è probabilmente dovuto al fatto che per la prima volta nel 2004 agli studenti è stato mandato materiale per autovalutare la propria preparazione prima del loro arrivo a Durham.

References

- [1] EURYDICE data base EURYBASE, <http://www.eurydice.org/>
- [2] Examination board AQA: <http://www.aqa.org.uk/>
- [3] Examination board Edexcel: <http://www.edexcel.org.uk/>
- [4] Examination board OCR: <http://www.ocr.org.uk/>
- [5] First Results from PISA 2003 - Executive Summary, <http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/1/63/34002454.pdf>
- [6] G. James (2002) *Mathematics in schools: Implications for undergraduate courses in engineering and other numerate disciplines*, *Mathematics Today*, 146, pp. 140-146
- [7] Knowledge and Skills for Life - First Results from PISA 2000, Executive Summary, <http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/44/32/33691620.pdf>
- [8] S. Mignani, R. Ricci *Metodi statistici per la misurazione delle competenze: analisi della preparazione matematica delle matricole*. In questo volume.
- [9] (1999) Syllabus di Matematica. Conoscenze e capacità per l'accesso all'Università. Suggestimenti dell'Unione Matematica Italiana per la preparazione all'accesso alle Facoltà scientifiche. Unione Matematica Italiana, Bologna
- [10] Sito web dell'Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema dell'Istruzione: <http://www.cede.it/>
- [11] Sito web del Programme for International Student Assessment of the Organisation for Economic Co-operation and Development (PISA), <http://www.pisa.oecd.org>
- [12] Sito web del Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS), <http://nces.ed.gov/timss/> and <http://timss.bc.edu/>
- [13] The International Commission on Mathematical Instruction ICMI, Bulletin No. 43, December 1997. ICMI Study On the Teaching and Learning of Mathematics at University Level Discussion Document, <http://www.mathunion.org/ICMI/bulletin/43/Study.html#curriculum>