ANALISI MATEMATICA T-A
10 Gennaio 2019 (tempo 90 minuti)

Compilare in stampatello:

- **Nome e Cognome:**
- **Numero di Matricola:**

ESERCIZIO 1. L'immagine della funzione

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2 + 3x + 1)$$

è

$$f(D_f) = \boxed{}.$$

ESERCIZIO 2.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(\cos x) + 1 - \cos x}{(\sin x)^4} = \boxed{}$$

.

ESERCIZIO 3. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{n\,4^n}$ converge se e solo se $\boxed{}$.

ESERCIZIO 4. La soluzione dell'equazione

$$DF(x) = \frac{\cos x}{1 + 2\sin x}, \qquad F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

è

$$F(x) = \boxed{}.$$

ESERCIZIO 5.

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}}{(e^x + 1)^{\frac{1}{4}}}\, dx = \boxed{}.$$

ESERCIZIO 6. Usando la definizione di successione convergente, verificare la validità della seguente formula

$$\lim_{n \to +\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0.$$

Soluzioni:

1. $[-e^{-1/2}, 5e^{-1/2}]$.
2. $-1/8$.
3. $]-3,1[$.
4. $F(x) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+2\sin x}{3}\right) + 1$.
5. $\frac{4}{7}((e+1)^{7/4} - 2^{7/4}) - \frac{4}{3}((e+1)^{3/4} - 2^{3/4})$.
6. Si deve verificare che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N > 0$ tale che, per ogni $n > N$, $|\log(1+n^{-1})| < \epsilon$. Visto che $\log(1+n^{-1}) \geq 0$, si deve solo verificare che fissato (in modo arbitrario) $\epsilon > 0$ si può trovare $N > 0$ tale che $\log(1+n^{-1}) < \epsilon$. Visto che $\log(1+n^{-1}) < \epsilon$ se e solo se $n > (e^{\epsilon} - 1)^{-1}$ basta scegliere $N = (e^{\epsilon} - 1)^{-1}$ e la verifica è completa.

ANALISI MATEMATICA T-A

10 Gennaio 2019 (tempo 90 minuti)

Compilare in stampatello:

- **Nome e Cognome:**
- **Numero di Matricola:**

ESERCIZIO 1. L'immagine della funzione

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}(2x^2 - x + 2)$$

è

$$f(D_f) = \boxed{}.$$

ESERCIZIO 2.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + \sin x) - \sin x}{\cos x - 1} = \boxed{}$$

.

ESERCIZIO 3. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{2n}}{n^2\, 9^n}$ converge se e solo se $\boxed{}$.

ESERCIZIO 4. La soluzione dell'equazione

$$DF(x) = \frac{\sin x}{2 + 3\cos x}, \qquad F(0) = 1$$

è

$$F(x) = \boxed{}.$$

ESERCIZIO 5.

$$\int_0^1 \frac{e^{3x}}{(e^x + 1)^{\frac{1}{4}}}\, dx = \boxed{}.$$

ESERCIZIO 6. Usando la definizione di successione convergente, verificare la validità della seguente formula

$$\lim_{n \to +\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Soluzioni:

1. $]0, 5e^{-1/2}]$.
2. 1.
3. $[-5, 1]$.
4. $F(x) = -\frac{1}{3}\log\left(\frac{2+3\cos x}{5}\right) + 1$.
5. $\frac{4}{11}((e+1)^{11/4} - 2^{11/4}) - \frac{8}{7}((e+1)^{7/4} - 2^{7/4}) + \frac{4}{3}((e+1)^{3/4} - 2^{3/4})$.
6. Si deve verificare che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N > 0$ tale che, per ogni $n > N$, $|\sin(n^{-1})| < \epsilon$. Visto che $\sin(n^{-1}) \geq 0$, si deve solo verificare che fissato (in modo arbitrario) $\epsilon > 0$ si può trovare $N > 0$ tale che, per ogni $n > N$, $\sin(n^{-1}) < \epsilon$. Visto che $\sin(n^{-1}) < \epsilon$ se e solo se $n > (\arcsin(\epsilon))^{-1}$ basta scegliere $N = (\arcsin(\epsilon))^{-1}$ e la verifica è completa.

ANALISI MATEMATICA T-A

10 Gennaio 2019 (tempo 90 minuti)

Compilare in stampatello:

- **Nome e Cognome:**
- **Numero di Matricola:**

ESERCIZIO 1. L'immagine della funzione

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2 - 3x + 1)$$

è

$$f(D_f) = \boxed{}.$$

ESERCIZIO 2.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + (e^x - 1)^2) - e^{2x} + 2e^x - 1}{(\tan x)^4} = \boxed{}$$

.

ESERCIZIO 3. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{n\sqrt{n}\,4^n}$ converge se e solo se $\boxed{}$.

ESERCIZIO 4. La soluzione dell'equazione

$$DF(x) = \frac{\cos x}{2 + 3\sin x}, \qquad F(0) = 1$$

è

$$F(x) = \boxed{}.$$

ESERCIZIO 5.

$$\int_0^1 \frac{e^{3x}}{(e^x + 1)^{\frac{1}{2}}}\, dx = \boxed{}.$$

ESERCIZIO 6. Usando la definizione di successione convergente, verificare la validità della seguente formula

$$\lim_{n \to +\infty} \tan\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Soluzioni:

1. $[-e^{-1/2}, 5e^{-1/2}]$.
2. $-1/2$.
3. $[-3, 1]$.
4. $F(x) = \frac{1}{3}\log\left(\frac{2+3\sin x}{2}\right) + 1$.
5. $\frac{2}{5}((e+1)^{5/2} - 2^{5/2}) - \frac{4}{3}((e+1)^{3/2} - 2^{3/2}) + 2(\sqrt{e+1} - \sqrt{2})$.
6. Si deve verificare che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N > 0$ tale che, per ogni $n > N$, $|\tan(n^{-1})| < \epsilon$. Visto che $\tan(n^{-1}) \geq 0$, si deve solo verificare che fissato (in modo arbitrario) $\epsilon > 0$ si può trovare $N > 0$ tale che, per ogni $n > N$, $\tan(n^{-1}) < \epsilon$. Visto che $\tan(n^{-1}) < \epsilon$ se e solo se $n > (\arctan(\epsilon))^{-1}$ basta scegliere $N = (\arctan(\epsilon))^{-1}$ e la verifica è completa.

ANALISI MATEMATICA T-A

24 Gennaio 2019 (tempo 90 minuti)

Compilare in stampatello:

- **Nome e Cognome:**
- **Numero di Matricola:**

ESERCIZIO 1. L'immagine della funzione

$$f(x) = (x+1)e^{\frac{x}{x-1}}$$

è

$$f(D_f) = \boxed{}.$$

ESERCIZIO 2.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \arctan(x^2)}{(1-\cos x)^3} = \boxed{}$$

.

ESERCIZIO 3. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(4x^2)^n}$ converge se e solo se $\boxed{}$.

ESERCIZIO 4. La soluzione dell'equazione

$$DF(x) = \arctan x, \qquad F(0) = 0$$

è

$$F(x) = \boxed{}.$$

ESERCIZIO 5.

$$\int_0^1 \arccos(\sqrt{x})\, dx = \boxed{}.$$

ESERCIZIO 6. Sia a_n la successione definita per ricorrenza come segue: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$, per $n \in \mathbb{N}$. Dimostrare, per induzione, che $a_n = 2^n - 1$.

Soluzioni:

1. $]-\infty, 1] \cup [4e^{3/2}, +\infty[$.
2. $8/3$.
3. $x \in]-\infty, -1/2[\cup]1/2, +\infty[$.
4. $F(x) = x \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$.
5. $\pi/4$.
6. Chiaramente $a_1 = 1 = 2-1$. Si deve mostrare che $a_n = 2^n - 1 \implies a_{n+1} = 2^{n+1} - 1$. La dimostrazione si completa osservando che $a_n = 2^n - 1 \implies a_{n+1} = 2a_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$.

ANALISI MATEMATICA T-A
24 Gennaio 2019 (tempo 90 minuti)

Compilare in stampatello:

- **Nome e Cognome:**
- **Numero di Matricola:**

ESERCIZIO 1. L'immagine della funzione

$$f(x) = (x+20)e^{\frac{1}{x}}$$

è

$$f(D_f) = \boxed{}.$$

ESERCIZIO 2.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \arcsin(x^2)}{(e^x - 1 - x)^3} = \boxed{}$$

.

ESERCIZIO 3. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+e^{n^2 x}}$ converge se e solo se $\boxed{}$.

ESERCIZIO 4. La soluzione dell'equazione

$$DF(x) = \arcsin x, \qquad F(0) = 1$$

è

$$F(x) = \boxed{}.$$

ESERCIZIO 5.

$$\int_0^1 \arcsin(-\sqrt{x})\, dx = \boxed{}.$$

ESERCIZIO 6. Sia a_n la successione definita per ricorrenza come segue: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 3a_n + 2$, per $n \in \mathbb{N}$. Dimostrare, per induzione, che $a_n = 3^n - 1$.

Soluzioni:

1. $]-\infty, 16e^{-1/4}] \cup [25e^{1/5}, +\infty[$.
2. $-4/3$.
3. $x > 0$.
4. $F(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.
5. $-\pi/4$.
6. Chiaramente $a_1 = 2 = 3-1$. Si deve mostrare che $a_n = 3^n - 1 \implies a_{n+1} = 3^{n+1} - 1$. La dimostrazione si completa osservando che $a_n = 3^n - 1 \implies a_{n+1} = 3a_n + 2 = 3(3^n - 1) + 2 = 3^{n+1} - 1$.

ANALISI MATEMATICA T-A

13 Febbraio 2019 (tempo 90 minuti)

Compilare in stampatello:

- **Nome e Cognome:**
- **Numero di Matricola:**

ESERCIZIO 1. L'immagine della funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-\frac{1}{x}}}$$

è

$$f(D_f) = \boxed{}.$$

ESERCIZIO 2.

$$\lim_{x\to+\infty} x(\arctan x - \arccos x^{-2}) = \boxed{}$$

.

ESERCIZIO 3. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \log(x^n)$ converge se e solo se $\boxed{}$.

ESERCIZIO 4. La soluzione dell'equazione

$$DF(x) = x\sin^2 x, \qquad F(0) = 0$$

è

$$F(x) = \boxed{}.$$

ESERCIZIO 5.

$$\int_0^1 \frac{x^3+2x+1}{1+x^2}\,dx = \boxed{}.$$

ESERCIZIO 6. Definire il simbolo

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = 3.$$

Soluzioni:

1. $]0, 1/2[\cup]1/2, 1[$.
2. -1.
3. $x \in]0, 1]$.
4. $F(x) = -\frac{x}{4}\sin(2x) - \frac{1}{8}\cos(2x) + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{8}$.
5. $\frac{1}{2}(1 + \log 2) + \frac{\pi}{4}$.
6. Per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $x \in] - 1, -1 + \delta[$, $|f(x) - 3| < \epsilon$.

ANALISI MATEMATICA T-A

13 Febbraio 2019 (tempo 90 minuti)

Compilare in stampatello:

- **Nome e Cognome:**
- **Numero di Matricola:**

ESERCIZIO 1. L'immagine della funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 + 2e^{\frac{1}{x}}}$$

è

$$f(D_f) = \boxed{}.$$

ESERCIZIO 2.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1 - e^{-x}}}{\sqrt{x}} = \boxed{}$$

.

ESERCIZIO 3. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^3}}{n!}$ converge se e solo se $\boxed{}$.

ESERCIZIO 4. La soluzione dell'equazione

$$DF(x) = e^x \sin(2x), \qquad F(0) = 0$$

è

$$F(x) = \boxed{}.$$

ESERCIZIO 5.

$$\int_0^1 \frac{x^3 + 3x + 1}{1 + x^2}\, dx = \boxed{}.$$

ESERCIZIO 6. Definire il simbolo

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -1.$$

Soluzioni:

1. $]0, 1/3[\cup]1/3, 1[$.
2. 1.
3. $x \in [-1, 1]$.
4. $F(x) = \frac{e^x}{5}(\sin(2x) - 2\cos(2x)) + \frac{2}{5}$.
5. $\frac{1}{2} + \log 2 + \frac{\pi}{4}$.
6. Per ogni $\epsilon > 0$ esiste $M > 0$ tale che, per ogni $x > M$, $|f(x) + 1| < \epsilon$.

ANALISI MATEMATICA T-A
14 Giugno 2019 (tempo 90 minuti)

Compilare in stampatello:

- **Nome e Cognome:**
- **Numero di Matricola:**

ESERCIZIO 1. L'immagine della funzione

$$f(x) = \log \sqrt{\frac{1}{1+x}}$$

è

$$f(D_f) = \boxed{}.$$

ESERCIZIO 2.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + x^5 - \sin x}{x^4 + \tan(x^3)} = \boxed{}$$

.

ESERCIZIO 3. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n(x+1)}}{n}$ converge se e solo se $\boxed{}$.

ESERCIZIO 4. La soluzione dell'equazione

$$DF(x) = \sin x \sin(x+2), \qquad F(0) = 0$$

è

$$F(x) = \boxed{}.$$

ESERCIZIO 5.

$$\int_0^1 \frac{4x^3 + 4}{1 + x^2}\, dx = \boxed{}.$$

ESERCIZIO 6. Dimostrare, per induzione, che $n \geq \log n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Soluzioni:

1. $\mathbb{R}$.

2. $1/6$.

3. $x > -1$.

4. $F(x) = \frac{\cos 2}{2}(x - \sin x \cos x) - \frac{\sin 2}{4}(\cos(2x) - 1)$.

5. $\pi + 2 - 2\log 2$.

6. Per $n = 1$ l'affermazione è vera ($1 \geq 0$). Assumendo $n \geq \log n$ si ha $1+n \geq 1+\log n$. La dimostrazione è terminata se $1 + \log n \geq \log(n+1)$. Visto che

$$1 + \log n \geq \log(n+1) \iff 1 \geq \log\left(\frac{n+1}{n}\right) \iff e \geq 1 + \frac{1}{n}$$

al fine di completare la dimostrazione basta osservare che $e > 2 > 1 + 1/n$ (per ogni $n \in \mathbb{N}$).

ANALISI MATEMATICA T-A

28 Giugno 2019 (tempo 90 minuti)

Compilare in stampatello:

- **Nome e Cognome:**
- **Numero di Matricola:**

ESERCIZIO 1. L'immagine della funzione

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$$

è

$$f(D_f) = \boxed{}.$$

ESERCIZIO 2.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) + x^3 - x}{1 - \cos(2x)} = \boxed{}$$

.

ESERCIZIO 3. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\log(n^x+1) - x\log n)$ converge se e solo se $\boxed{}$.

ESERCIZIO 4. La soluzione dell'equazione

$$DF(x) = \frac{x+1}{x}, \qquad F(1) = 0$$

è

$$F(x) = \boxed{}.$$

ESERCIZIO 5.

$$\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx = \boxed{}.$$

ESERCIZIO 6. Calcolare, usando la definizione, la derivata della funzione $\frac{x+1}{x}$.

Soluzioni:

1. $]0, \sqrt{2}]$.
2. $-1/4$.
3. $x > 1$.
4. $F(x) = x - 1 + \log x$.
5. $1 + \log\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.
6. Visto che $(x+1)/x = 1 + 1/x$ il problema si riduce a calcolare

$$\lim_{h \to 0} \frac{1 + \frac{1}{x+h} - 1 - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2}.$$

ANALISI MATEMATICA T-A
15 Luglio 2019 (tempo 90 minuti)

Compilare in stampatello:

- **Nome e Cognome:**
- **Numero di Matricola:**

ESERCIZIO 1. L'immagine della funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{x+1}$$

è

$$f(D_f) = \boxed{}.$$

ESERCIZIO 2.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x^3 \log(x^3)}{\log(1-x^2)} = \boxed{}$$

.

ESERCIZIO 3. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n^{3x}}\right)$ converge se e solo se $\boxed{}$.

ESERCIZIO 4. La soluzione dell'equazione

$$DF(x) = \frac{x+1}{x^2}, \qquad F(1) = 1$$

è

$$F(x) = \boxed{}.$$

ESERCIZIO 5.

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x \log x}\, dx = \boxed{}.$$

ESERCIZIO 6. Trovare l'estremo inferiore, λ, dell'insieme

$$C = \left\{ 1 + \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Verificare, usando la definizione, che $\lambda = \inf C$.

Soluzioni:

1. $]-\infty, 0[\cup[1, +\infty[$.
2. -1.
3. $x > 1/3$.
4. $F(x) = 2 + \log|x| - 1/x$.
5. $\log 2$.
6. $\inf C = 1$, infatti 1 è un minorante per C (per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $1 \leq 1 + 1/n$) ed 1 è il massimo dei minoranti (infatti dato ad arbitrio $\epsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $1 + 1/n < 1 + \epsilon$, basta prendere un numero naturale $n > 1/\epsilon$).