ANALISI MATEMATICA T-A

xx Gennaio 2019 (tempo 90 minuti)

Compilare in stampatello:

- **Nome e Cognome:**
- **Numero di Matricola:**

ESERCIZIO 1. L'immagine della funzione

$$f(x) = |x|^x$$

è

$$f(D_f) = \boxed{}.$$

ESERCIZIO 2.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cos x - \tan x}{\log(1+x) - \sinh x} = \boxed{}$$

.

ESERCIZIO 3. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^{n!}$ converge se e solo se $\boxed{}$.

ESERCIZIO 4. La soluzione dell'equazione

$$DF(x) = \frac{1}{\sin x \cos x}, \qquad F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

è

$$F(x) = \boxed{}.$$

ESERCIZIO 5.

$$\int_{\log\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)}^{0} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\, dx = \boxed{}.$$

ESERCIZIO 6. Calcolare, usando la definizione, la derivata di

$$\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Soluzioni:

1. $]0, +\infty[$.
2. 0.
3. $]-1, 1[$.
4. $F(x) = \log(\tan x)$.
5. $\frac{\pi}{4}$.
6. $\lim_{y\to x} \frac{y^{-1/2}-x^{-1/2}}{y-x} = \lim_{y\to x} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{(y-x)\sqrt{y}\sqrt{x}} = \lim_{y\to x} \frac{x-y}{(y-x)\sqrt{y}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = -\frac{1}{2x^{3/2}}$.

ANALISI MATEMATICA T-A

xx Gennaio 2019 (tempo 90 minuti)

Compilare in stampatello:

- **Nome e Cognome:**
- **Numero di Matricola:**

ESERCIZIO 1. L'immagine della funzione

$$f(x) = \frac{\log x}{x}$$

è

$$f(D_f) = \boxed{}.$$

ESERCIZIO 2.

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^{\sin x} = \boxed{}$$

.

ESERCIZIO 3. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^n\, x^{n^2}$ converge se e solo se $\boxed{}$.

ESERCIZIO 4. La soluzione dell'equazione

$$DF(x) = \frac{\cos x}{\sin x}, \qquad F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

è

$$F(x) = \boxed{}.$$

ESERCIZIO 5.

$$\int_1^2 \frac{1}{x^3 + x^2}\, dx = \boxed{}.$$

ESERCIZIO 6. Usando la definizione, verificare che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{2n}+1}{e^n} = +\infty.$$

Soluzioni:

1. $]-\infty, e^{-1}]$.
2. 1.
3. $]-1, 1[$.
4. $F(x) = \log(\sin x)$.
5. $\log\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}$.
6. Si vuole mostrare che per ogni $M > 0$ esiste $N > 0$ tale che per ogni $n > N$ $\frac{e^{2n}+1}{e^n} > M$.

Quindi fissato $M > 0$ si deve trovare N:

$$\frac{e^{2n}+1}{e^n} > M \iff e^{2n} - Me^n + 1 > 0,$$

visto che l'ultima disuguaglianza è soddisfatta se

$$e^n > \frac{M + \sqrt{M^2 - 4}}{2} \iff n > \log\left(\frac{M + \sqrt{M^2 - 4}}{2}\right)$$

basta scegliere $N = \log\left(\frac{M+\sqrt{M^2-4}}{2}\right)$.