TEORIA DEGLI SCHEMI

Università di Bologna, Dipartimento di Matematica
Anno accademico 2024/25, Secondo Semestre

Andrea Petracci
a [dot] petracci (nospam) [at] unibo [dot] it
https://www.dm.unibo.it/~andrea.petracci3/2025Schemi/

Aggiornato il 29 maggio 2025

Prerequisiti

Oltre ai corsi obbligatori di algebra e geometria della laurea triennale, si richiede che chi voglia seguire questo corso conosca alcuni argomenti di base di algebra commutativa e di geometria algebrica; piú precisamente:

- algebra commutativa (come trattata nel corso *06689 - Algebra commutativa*): anelli, ideali, moduli, moduli di frazioni, prodotti tensoriali di moduli, piattezza, anelli noetheriani e artiniani, estensioni finite e intere, Nullstellensatz, cenni di teoria della dimensione. Referenze: [AM69, capitoli 1-3, 5-8 e cenni del capitolo 11], [Mat89, capitoli 1-5, 7, 13], [Eis95, capitoli 1,2,4,8,13], [Rei95].
- geometria proiettiva (come trattata nel corso *54777 - Geometria proiettiva*): spazio proiettivo, carte affini, coordinate omogenee, proiettività, (dis)omogeneizzazione di polinomi, ipersuperfici algebriche affini e proiettive, quadriche e coniche, studio delle singolarità delle curve algebriche piane, una qualche definizione di molteplicità di intersezione tra due curve, enunciato del teorema di Bezout. Referenze: [Ser00, capitoli 3,4], [FFP16].
- geometria algebrica "classica" (come trattata nel corso *96733 - Curve e superfici algebriche*): topologia di Zariski su k^n e su $\mathbb{P}^n(k)$ per un campo algebricamente chiuso k, Nullstellensatz, corrispondenza tra ideali massimali/primi/radicali e punti/chiusi irriducibili/chiusi, varietà affini e (quasi-)proiettive, funzioni regolari, morfismi, equivalenza tra la categoria delle varietà affini e la categoria delle k-algebre ridotte di tipo finito, prodotti, immersioni di Segre e di Veronese, funzioni e mappe razionali, equivalenza tra la categoria i cui oggetti sono le varietà irriducibili e le cui frecce sono le mappe razionali dominanti e la categoria delle estensioni finitamente generate di campi di k, dimensione, spazio tangente e liscezza. Referenze: [Har77, sezioni I.1-5], [SKKT00, capitoli 1-7], [Rei88], [Sha13, sezioni 1.1-6, 2.1].

Inoltre è richiesta la conoscenza di alcune nozioni di base di teoria delle categorie: categorie, funtori, trasformazioni naturali, funtori pieni/fedeli/pienamente fedeli, equivalenze di categorie, prodotti e coprodotti, oggetti terminali e iniziali. Per questi argomenti suggerisco i primi capitoli di [KS06] e [Mac71].

Programma preliminare

Il corso è un'introduzione alla teoria degli schemi, sviluppata da Alexander Grothendieck. Gli argomenti trattati includeranno: fasci, schemi, proprietà globali e locali degli schemi, fasci coerenti, divisori, differenziali.

Ci baseremo sostanzialmente sul capitolo II di [Har77] e sui capitoli 2-7 di [Liu02]. Altre possibili referenze possono essere i libri [EH00, GW20, Mum99].

La referenza rigorosa e fondazionale della teoria degli schemi, scritta dallo stesso Grothendieck (con l'aiuto di Jean Dieudonné), è la serie di volumi *Éléments de géométrie algébrique*, comunemente nota con la sigla EGA. Questi volumi delle Publications Mathématiques de l'IHÉS possono essere scaricati liberamente al http://www.numdam.org/search/elements%20geometrie%20algebrique-%22Grothendieck,%20Alexander%22-qn/. Un'altra referenza rigorosa e onnicomprensiva della teoria degli schemi (e di tante altre cose) è il blog collaborativo https://stacks.math.columbia.edu mantenuto da Aise Johan de Jong. Sconsiglio a chi si approccia per la prima volta alla teoria degli schemi di studiare EGA e Stacks Project, perché queste due opere enciclopediche non forniscono intuito geometrico né esempi. D'altra parte queste due opere sono molto utili a chi ha già esperienza e fa ricerca.

Perché la teoria degli schemi?

La teoria degli schemi, sviluppata da Alexander Grothendieck negli anni '60 del secolo scorso, è il linguaggio moderno e rigoroso con cui si studia/fa/scrive la geometria algebrica oggi. Esso unifica la geometria algebrica

classica (ovvero lo studio dei luoghi di zeri di equazioni polinomiali a coefficienti in un campo algebricamente chiuso) e la teoria algebrica dei numeri (ovvero lo studio del comportamento degli ideali primi rispetto alle estensioni finite di campi del campo dei numeri razionali), permettendo di dare intuizione geometrica all'algebra commutativa.

Vale la seguente analogia: il calcolo differenziale (cioè lo studio delle funzioni differenziabili tra aperti di $\mathbb{R}^n$ svolto ad Analisi 2) sta alla geometria differenziale (cioè lo studio delle varietà differenziabili), come l'algebra commutativa (cioè lo studio degli anelli commutativi) sta alla teoria degli schemi. Infatti, in modo molto vago, si può dire che uno schema è un "oggetto geometrico" che localmente si comporta come un anello.

Alcuni vantaggi della teoria degli schemi sono: poter considerare funzioni nilpotenti per poter parlare rigorosamente di "molteplicità", poter considerare la stessa varietà su campi diversi, poter considerare oggetti "aritmetici" (ovvero definiti su $\mathbb{Z}$ o sull'anello degli interi di un campo di numeri) utili per applicare tecniche geometriche a problemi di equazioni diofantee.

Oltre alle introduzioni che potete leggere nei libri menzionati sopra, potete dare uno sguardo a questo articoletto scritto da David Mumford `https://www.dam.brown.edu/people/mumford/blog/2014/Grothendieck.html`.

Riferimenti bibliografici

[AM69] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.

[EH00] David Eisenbud and Joe Harris. *The geometry of schemes*, volume 197 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000.

[Eis95] David Eisenbud. *Commutative algebra*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. With a view toward algebraic geometry.

[FFP16] Elisabetta Fortuna, Roberto Frigerio, and Rita Pardini. *Projective geometry*, volume 104 of *Unitext*. Springer, 2016. Solved problems and theory review.

[GW20] Ulrich Görtz and Torsten Wedhorn. *Algebraic geometry I. Schemes—with examples and exercises*. Springer Studium Mathematik—Master. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2020.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[KS06] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Categories and sheaves*, volume 332 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[Liu02] Qing Liu. *Algebraic geometry and arithmetic curves*, volume 6 of *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 2002. Translated from the French by Reinie Erné, Oxford Science Publications.

[Mac71] Saunders MacLane. *Categories for the working mathematician*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1971.

[Mat89] Hideyuki Matsumura. *Commutative ring theory*, volume 8 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1989. Translated from the Japanese by M. Reid.

[Mum99] David Mumford. *The red book of varieties and schemes*, volume 1358 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, expanded edition, 1999. Includes the Michigan lectures (1974) on curves and their Jacobians, With contributions by Enrico Arbarello.

[Rei88] Miles Reid. *Undergraduate algebraic geometry*, volume 12 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[Rei95] Miles Reid. *Undergraduate commutative algebra*, volume 29 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[Ser00] Edoardo Sernesi. *Geometria 1*. Bollati Boringhieri, 2000.

[Sha13] Igor R. Shafarevich. *Basic algebraic geometry. 1*. Springer, Heidelberg, third edition, 2013. Varieties in projective space.

[SKKT00] Karen E. Smith, Lauri Kahanpää, Pekka Kekäläinen, and William Traves. *An invitation to algebraic geometry*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2000.

Lezioni

(1) **19 Febbraio 2025.** Introduzione al corso e questioni organizzative.

Ripasso di geometria algebrica "classica": chiusi affini, chiusi proiettivi, funzioni polinomiali su chiusi affini, Nullstellensatz, morfismi polinomiali tra chiusi affini, equivalenza tra la categoria dei chiusi affini coi morfismi polinomiali e la categoria delle k-algebre di tipo finito ridotte. Cenni alla categoria delle varietà quasi-proiettive.

Motivazione alla teoria degli schemi: 1) lavorare con varietà astratte non immerse, 2) lavorare con campi non algebricamente chiusi (come $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{F}_p$ per scopi aritmetici) o su anelli arbitrari, 3) intuizione geometrica di intersezione di curve piane e punti di intersezione con molteplicità e necessità di avere oggetti geometrici diversi corrispondenti a ideali diversi ma con lo stesso radicale, 4) spazi di moduli (M_g, moduli di fibrati vettoriali, grassmanniane, sistemi lineari di curve piane).

Convenzioni, notazioni e richiami di algebra commutativa. Notazioni: $\mathbb{Z}[\frac{1}{f}]$, $\mathbb{Z}_{(p)} \hookrightarrow \mathbb{Z}_p \simeq \mathbb{Z}[\![x]\!]/(x-p)$ (numeri p-adici), $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Categorie slice su un oggetto. Definizione di algebra su un anello. Categoria delle algebre su un anello. Definizione di algebra finita, intera, di tipo finito. Un'algebra è finita se e solo se è di tipo finito e intera (senza dimostrazione). Esempi: $A \twoheadrightarrow A/I$, $A \hookrightarrow A[x]$, $A \to A_f$, $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}[x]/(x^3+x+1)$, $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}[\![x]\!]$, $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}_{(2)}$, $\mathbb{Z}_{(2)} \hookrightarrow \mathbb{Q}$. Lemma di Zariski o Nullstellensatz algebrico (senza dimostrazione):

se $L \supseteq K$ è un'estensione di campi e L è una K-algebra di tipo finito, allora L è un K-spazio vettoriale di dimensione finita.

(2) **20 Febbraio 2025.** Spettro primo di un anello e topologia di Zariski. Aperti principali. Il radicale di un ideale è l'intersezione dei primi che lo contengono (senza dimostrazione). Lo spettro primo di un anello è quasi-compatto. La chiusura di T in $\operatorname{Spec} A$ è $\mathrm{V}(\cap_{\mathfrak{p}\in T}\mathfrak{p})$. I punti chiusi di $\operatorname{Spec} A$ sono gli ideali massimali. Esempi: campi, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_{(2)}$, $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$. Definizione di punto generico per lo spettro di un dominio.

Definizione di spazi topologici irriducibili e di componenti irriducibili di uno spazio topologico; proprietà (senza dimostrazione). $\mathrm{V}(I)$ è irriducibile se e solo se $\sqrt{I}$ è primo. Bigezione tra punti chiusi/sottoinsiemi chiusi irriducibili/sottoinsiemi chiusi di $\operatorname{Spec} A$ e ideali massimali/primi/radicali di A.

Omomorfismi di anelli inducono funzioni continue tra gli spettri. Una suriezione di anelli induce un'immersione chiusa. Una localizzazione induce un'immersione. Spettro di un prodotto di due anelli.

Definizione di campo residuo. Intuizione su "la funzione $f \in A$ si annulla nel punto $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$".

(3) **26 Febbraio 2025.** Lemma di Gauss per irriducibilità di polinomi in una variabile a coefficienti in UFD (senza dimostrazione). Dimostrazione rigorosa del fatto che $y^2 - x^3 \in k[x, y]$ è irriducibile. Caratterizzazione degli ideali primi di $A[x]$ se A è un PID. Studio di $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x]$ come superficie aritmetica: classificazione dei punti e loro campi residui, fibre sopra $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, il chiuso $\mathrm{V}(x^2 + 1)$ è $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[i]$. Caratterizzazione degli ideali primi in $k[x, y]$.

Richiami di geometria algebrica classica: Nullstellensatz per chiusi affini su un campo algebricamente chiuso.

Spazi topologici di Jacobson e caratterizzazione. Anelli di Jacobson e caratterizzazione. Esempi di anelli di Jacobson. Un anello locale è di Jacobson se e solo se ha dimensione zero. Se $f\colon A \to B$ è un omomorfismo di tipo finito e A è un anello di Jacobson, allora B è un anello di Jacobson e la contrazione di un massimale di B lungo f è un massimale di A e l'omomorfismo indotto tra i campi residui è un'estensione finita di campi (senza dimostrazione). Un'algebra di tipo finito su un campo è un anello di Jacobson.

Se k è un campo algebricamente chiuso e X è un chiuso affine classico su k, allora X è omeomorfo a $\operatorname{Specm} k[X]$; bigezione tra punti/chiusi irriducibili/chiusi di X e punti chiusi/chiusi irriducibili/chiusi di $\operatorname{Spec} k[X]$. Se I è un ideale di $k[X]$, allora il chiuso schematico $\mathrm{V}(I)$ contiene tutti e soli gli ideali primi di $k[X]$ che corrispondono a sottoinsiemi chiusi irriducibili del chiuso classico $\mathrm{Z}_X(I) \subseteq X$.

(4) **5 marzo 2025.** Se X è un chiuso affine classico sul campo algebricamente chiuso k e $\mathfrak{p}$ è un ideale primo di $k[X]$, allora il campo residuo $\kappa(\mathfrak{p})$ è il campo delle funzioni razioni sul chiuso irriducibile $\mathrm{Z}_X(\mathfrak{p})$. Se $f\colon X \to Y$ è un morfismo polinomiale tra chiusi affini classici sul campo algebricamente chiuso k e $f^*\colon k[Y] \to k[X]$ è l'omomorfismo di k-algebre indotto, allora $\operatorname{Spec} f^*\colon \operatorname{Spec} k[X] \to \operatorname{Spec} k[Y]$ "è" l'estensione di f ai punti non chiusi nel seguente modo: l'ideale primo $\mathfrak{q}$ di $k[X]$ viene mandato nel primo di $k[Y]$ corrispondente alla chiusura di $f(\mathrm{Z}_X(\mathfrak{q}))$ in Y.

Se $\varphi\colon A \to B$ è un omomorfismo di anelli, $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$ e $\mathfrak{q} = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$, allora φ induce un omomorfismo iniettivo di domini $A/\mathfrak{p} \hookrightarrow A/\mathfrak{q}$, un omomorfismo locale $A_\mathfrak{p} \to B_\mathfrak{q}$ e un'estensione di campi $\kappa(\mathfrak{p}) \hookrightarrow \kappa(\mathfrak{q})$.

Definizioni di prefascio e fascio su uno spazio topologico date per buono. Definizione di prefascio separato su uno spazio topologico. Esempi: prefascio costante, fascio costante, funzioni continue a valori in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, funzioni continue mai nulle a valori in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, funzioni continue in un gruppo topologico, funzioni continue e limitate a valori in $\mathbb{R}$.

Se P è un prefascio separato allora $P(\emptyset) = 0$.

Omomorfismi di prefasci e di fasci. Categoria dei prefasci e dei fasci. La categoria dei fasci è una sottocategoria piena della categoria dei prefasci.

Definizione di nucleo e immagine di un omomorfismo di fasci; lasciato per esercizio mostrare che siano fasci.

Sollevamento di applicazioni qualsiasi rispetto a un rivestimento (senza dimostrazione). Se X è uno spazio topologico con una base di aperti semplicemente connessi (per esempio una varietà topologica), allora l'esponenziale $\exp\colon \mathcal{C}_{X,\mathbb{C}} \to \mathcal{C}^*_{X,\mathbb{C}}$ è un omomorfismo suriettivo di fasci con nucleo isomorfo al fascio costante $\mathbb{Z}_X$; in generale non è suriettivo su ogni aperto (problema dell'esistenza del logaritmo complesso).

Spighe e germi di un prefascio in un punto. La spiga è un gruppo abeliano (senza dimostrazione). Germi delle funzioni C^∞ reali in una variabile e confronto con $\mathbb{R}[\![T]\!]$ tramite lo sviluppo di Taylor. Germi delle funzioni olomorfe in una variabile e confronto con $\mathbb{C}[\![T]\!]$ tramite lo sviluppo di Taylor; definizione di $\mathbb{C}\{T\}$. Se X è un chiuso affine classico sul campo algebricamente chiuso k e $x \in X$ è un punto, allora la spiga del fascio delle funzioni regolari nel punto x è la localizzazione di $k[X]$ nell'ideale massimale $\mathrm{I}_X(x)$ (senza dimostrazione). Se X è una varietà quasi-proiettiva classica liscia su $\mathbb{C}$ di dimensione n e $x \in X$ è un punto classico, confronto tra germi di funzioni regolari in x, germi di funzioni olomorfe in x e $\mathbb{C}[\![T_1, \dots, T_n]\!]$.

(5) **6 Marzo 2025.** Fascificazione di un prefascio: definizione e proprietà. La fascificazione dà un funtore aggiunto all'inclusione della categoria dei fasci nella categoria dei prefasci. Proprietà dei monomorfismi e degli

epimorfismi di fasci. Kernel, immagine, cokernel e esattezza nella categoria dei prefasci e nella categoria dei fasci.

Successione esatta esponenziale e costruzione dell'omomorfismo $\mathcal{C}^*_{X,\mathbb{C}}(X) \to \mathrm{H}^1(X,\mathbb{Z})$ tramite il numero di avvolgimento che prolunga la sequenza esatta delle sezioni globali.

Costruzione e prime proprietà del fascio indotto da un A-modulo su $\operatorname{Spec} A$.

(6) **10 Marzo 2025.** Proprietà del fascio indotto da un A-modulo su $\operatorname{Spec} A$. Il gruppo delle sezioni globali di $\tilde{M}$ è M (con dimostrazione).

Push-forward di un fascio tramite una funzione continua. Relazione tra le spighe. Esempi con target il punto (sezioni globali) e con source il punto (fascio grattacielo).

Pull-back di un fascio tramite una funzione continua. Esempio dell'immersione di un punto (spiga) e di un'immersione aperta (restrizione di un fascio a un aperto). Aggiunzione tra pull-back e push-forward (senza dimostrazione).

Se $\varphi\colon A \to B$ è un omomorfismo di anelli e N è un B-modulo, allora il pushforward di $\tilde{N}^B$ tramite $\operatorname{Spec}\varphi$ è $\tilde{N}^A$. Esempio per la suriezione $A \twoheadrightarrow A/I$. Definizione di supporto di un fascio. Il supporto di $\widetilde{A/I}^A$ è $\mathrm{V}(I)$.

Definizione di spazio anellato e di spazio localmente anellato. Esempi: funzioni continue a valori in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ su uno spazio topologico, funzioni C^∞ a valori in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ su una smooth manifold, funzioni olomorfe su una complex manifold, funzioni regolari su una varietà quasi-proiettiva 'classica' su un campo algebricamente chiuso, fascio di struttura su $\operatorname{Spec} A$. Se k è un campo algebricamente chiuso e X è un chiuso affine 'classico' su k, allora il fascio delle funzioni regolari 'classiche' su X corrisponde al fascio $\widetilde{k[X]}$.

(7) **12 Marzo 2025.** Se X è uno spazio topologico di Jacobson e $i\colon X_0 \hookrightarrow X$ è l'inclusione dell'insieme dei punti chiusi, allora $i_* : \mathrm{Sh}(X_0) \to \mathrm{Sh}(X)$ è un'equivalenza.

Definizione di campo residuo in un punto in uno spazio localmente anellato. Notazioni: $f_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ e $f(x) \in \kappa(x)$ per una sezione di $\mathcal{O}_X$ su un intorno aperto di x in X. Se $(X,\mathcal{O}_X)$ è uno spazio localmente anellato, $U \subseteq X$ è aperto e $f \in \mathcal{O}_X(U)$, allora il luogo dove f si annulla è un chiuso di U (lasciato per esercizio).

Definizione di omomorfismo locale tra anelli locali. Esempio di omomorfismo non locale tra anelli locali.

Per una funzione continua $f\colon X \to Y$, costruzione di $f^\#\colon \mathcal{C}_{Y,\mathbb{R}} \to f_*\mathcal{C}_{X,\mathbb{R}}$ omomorfismo di fasci di $\mathbb{R}$-algebre. Definizione di morfismo di spazi (localmente) anellati. Composizione di morfismi di spazi anellati. Categorie di spazi (localmente) anellati su un anello e confronto con manifold C^∞, complex manifold, varietà algebriche quasi-proiettive "classiche" su un campo algebricamente chiuso.

Definizione di varietà algebriche "astratte" "classiche" su un campo algebricamente chiuso. Definizione di schema affine (su un anello), schema (su un anello), varietà algebrica affine "schematica" su un campo, di varietà algebrica "schematica" su un campo.

Se k è un campo algebricamente chiuso, funtore da varietà algebriche (affini) "classiche" su k a varietà algebriche (affini) "schematiche".

Un aperto di uno schema è uno schema. Gli aperti affini di uno schema formano una base.

(8) **17 Marzo 2025.** Se X e Y sono smooth manifold e $f\colon X \to Y$ è una funzione continua tale che esiste $f^\#\colon \mathcal{C}^\infty_{Y,\mathbb{R}} \to f_*\mathcal{C}^\infty_{X,\mathbb{R}}$ omomorfismo di fasci di $\mathbb{R}$-algebre tale che $(f,f^\#)$ è un morfismo di spazi localmente $\mathbb{R}$-anellati $(X,\mathcal{C}^\infty_{X,\mathbb{R}}) \to (Y,\mathcal{C}^\infty_{Y,\mathbb{R}})$, allora f è C^∞. La categoria delle smooth manifold con le mappe C^∞ è equivalente a una sottocategoria piena della categoria degli spazi localmente $\mathbb{R}$-anellati. La categoria delle complex manifold con le mappe olomorfe è equivalente a una sottocategoria piena della categoria degli spazi localmente $\mathbb{C}$-anellati. Se k è un campo algebricamente chiuso, la categoria delle varietà quasi-proiettive classiche su k è equivalente a una sottocategoria piena della categoria degli spazi localmente k-anellati.

Un omomorfismo di anelli $A \to B$ induce un morfismo di schemi $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$. Se A e B sono due anelli, l'insieme degli omomorfismi di anelli $A \to B$ è in bigezione con l'insieme dei morfismi di schemi $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$. La categoria degli anelli è equivalente all'opposta della categoria degli schemi affini.

Le sezioni globali di $\mathbb{A}^2_k \smallsetminus \mathrm{V}(x,y)$ sono $k[x,y]$ e $\mathbb{A}^2_k \smallsetminus \mathrm{V}(x,y)$ non è uno schema affine.

Costruzione di morfismi di schemi $X \to Y$ tramite un ricoprimento aperto di X. Se X è uno schema e Y è uno schema affine, allora l'insieme dei morfismi di schemi $X \to Y$ è in bigezione con l'insieme degli omomorfismi di anelli $\mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X)$. Se R è un anello, allora la categoria degli R-schemi è equivalente alla categoria slice degli schemi sopra $\operatorname{Spec} R$.

Incollamento di spazi topologici, di fasci e di schemi.

(9) **19 Marzo 2025.** Definizione di spazio affine su un anello. Costruzione di $\mathbb{P}^1_R$ incollando due copie di $\mathbb{A}^1_R$; sezioni globali di $\mathbb{P}^1_R$. Cenno sulla costruzione di $\mathbb{P}^n_R$ incollando $n+1$ copie di $\mathbb{A}^n_R$. Cenno sulla costruzione della Grassmanniana su un anello. Cenno sulla costruzione di $\mathbb{P}^n_R \times_R \mathbb{P}^m_R$ incollando $(n+1)(m+1)$ copie di $\mathbb{A}^{n+m}_R$.

Costruzione della retta con due origini incollando due copie di $\mathbb{A}^1_R$. Costruzione dell piano con due origini

incollando due copie di $\mathbb{A}^2_R$: qui esistono due aperti affini la cui intersezione non è affine.

Definizione di immersione aperta e di immersione chiusa di schemi. Definizione di sottoschema aperto e di sottoschema chiuso. Se A è un anello, allora la funzione che associa a un ideale $I \subseteq A$ la classe dell'immersione chiusa $\operatorname{Spec} A/I \hookrightarrow \operatorname{Spec} A$ è una bigezione tra l'insieme degli ideali di A e l'insieme dei sottoschemi chiusi di $\operatorname{Spec} A$ (svolta la dimostrazione della buona definizione e dell'iniettività; omessa la dimostrazione della suriettività).

Definizione di schema quasi-compatto, connesso, irriducibile. Uno schema è quasi-compatto se e solo se esiste un ricoprimento aperto affine finito. Definizione e caratterizzazione degli schemi ridotti. Definizione e caratterizzazione degli schemi integri.

Se X è uno schema, i sottoinsiemi chiusi e irriducibili di X sono in bigezione con i punti di X (senza dimostrazione). Definizione di punto generico di uno schema irriducibile.

Proprietà degli schemi integri (senza dimostrazione): gli omomorfismi di restrizione tra aperti non vuoti sono iniettivi, l'omomorfismo che manda l'anello delle sezioni su un aperto non vuoto nella spiga in un punto è iniettivo, il punto generico sta in ogni aperto non vuoto, definizione del campo delle funzioni razionali, se U è un aperto affine non vuoto allora il campo delle funzioni razionali è il campo delle frazioni di $\mathcal{O}_X(U)$. Campo delle funzioni razionali di $\mathbb{P}^n_k$.

(10) **20 Marzo 2025.** Breve discussione dell'Esercizio 1.1(5) e del perché i primi di $B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$ sono in bigezione con i primi nella fibra di $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ sopra $\mathfrak{p}$.

Definizione e alcune caratterizzazioni dei domini a valutazione discreta. Esempi di DVR. Esercizio 1.3(2): se R è un DVR con uniformizzante π, allora per ogni $n \geq 1$ il polinomio $\pi^n x - 1 \in R[x]$ genera un ideale massimale e $\operatorname{Specm} R[x]$ è denso in $\operatorname{Spec} R[x]$.

Breve discussione sull'Esercizio 1.4(4). Svolgimento dell'Esercizio 1.5.

(11) **2 Aprile 2025.** Definizione di schema localmente noetheriano. Se X è uno schema localmente noetheriano e $U \subseteq X$ è un aperto affine, allora $\mathcal{O}_X(U)$ è un anello noetheriano. $\operatorname{Spec} A$ è uno schema localmente noetheriano se e solo se A è un anello noetheriano. Definizione di schema noetheriano. Una varietà algebrica su un campo è uno schema noetheriano.

Definizione e caratterizzazione degli spazi topologici noetheriani. $\operatorname{Spec} A$ è uno spazio topologico noetheriano se e solo se vale a.c.c. sugli ideali radicali di A. Lo spazio topologico soggiacente di uno schema noetheriano è noetheriano. Esempio di uno schema non noetheriano il cui spazio topologico soggiacente è noetheriano.

Uno spazio topologico noetheriano ha un numero finito di componenti irriducibili. Definizione di punto generico in uno schema. Se X è uno schema noetheriano e ξ è un punto generico di X, allora $\mathcal{O}_{X,\xi}$ è un anello artiniano locale. Definizione di molteplicità di una componente irriducibile in uno schema noetheriano. Gli schemi $\operatorname{Spec} k[x,y]/(x^5y^2)$ e $\operatorname{Spec} k[x,y]/((x^5y^2) \cap (x,y)^8)$ sono due sottoschemi diversi di $\mathbb{A}^2_k$, ma hanno le stesse componenti irriducibili con le stesse molteplicità.

Dimensione di uno spazio topologico e codimensione di un sottoinsieme chiuso irriducibile. Proprietà della dimensione rispetto a ricoprimenti aperti e a ricoprimenti chiusi finiti. Dimensione di Krull di un anello e altezza di un ideale primo. La dimensione di Krull di A è la dimensione dello spazio topologico $\operatorname{Spec} A$. $\dim A/I \leq \dim A$ e $\dim S^{-1}A \leq \dim A$. Se A è un anello noetheriano allora $\dim A[x] = 1 + \dim A$ (senza dimostrazione). Se k è un campo allora $\dim k[x_1, \ldots, x_n] = n$. Hauptidealsatz (senza dimostrazione). Se $A \hookrightarrow B$ è un omomorfismo iniettivo e intero allora $\dim A = \dim B$ (senza dimostrazione).

Basi di trascendenza e grado di trascendenza di un'estensione di campi: definizione e proprietà (senza dimostrazione). Se $f \in k[x,y]$ è irriducibile e $\deg_x f > 0$, allora $\operatorname{Frac}(k[x,y]/(f)) = k(y)[x]/(f)$ e ha y come base di trascendenza su k.

Se k è un campo e A è un dominio di tipo finito su k, allora A è catenario e $\dim A$ coincide col grado di trascendenza di $\operatorname{Frac}(A)$ su k (senza dimostrazione).

Significato geometrico di una base di trascendenza: se X è uno schema integro di tipo finito sul campo k di dimensione n allora esiste $X \dashrightarrow \mathbb{A}^n_k \subseteq \mathbb{P}^n_k$ mappa razionale dominante. Significato geometrico della normalizzazione di Noether: se X è una varietà affine sul campo k di dimensione n, allora esiste un morfismo finito e suriettivo $X \to \mathbb{A}^n_k$; se k è infinito e $X \hookrightarrow \mathbb{A}^N_k$ allora si può scegliere lineare.

Definizione di varietà razionale e unirazionale. Cenni al problema di Lüroth.

(12) **3 Aprile 2025.** Se X è uno spazio topologico di Jacobson e X_0 è l'insieme dei punti chiusi di X, allora $\dim X = \dim X_0$.

Proprietà della dimensione e della dimensione di un anello noetheriano locale (senza dimostrazione). Definizione di anelli regolari. Un anello noetheriano locale di dimensione 0 è regolare se e solo se è un campo. Un anello noetheriano locale di dimensione 1 è regolare se e solo se è un DVR. Esempi.

Definizione di schema regolare e di spazio tangente a uno schema in un punto. Per una varietà affine lo spazio tangente è il nucleo della matrice jacobiana. Cenni sull'interpretazione geometrica della dimensione di

immersione in termini di immersione chiusa di un intorno analitico/formale.

Teorema di Auslander–Buchsbaum: un anello noetheriano locale regolare è un UFD (senza dimostrazione). Un punto regolare di uno schema localmente noetheriano sta in un'unica componente irriducibile. Teorema di Serre: la localizzazione di un anello locale regolare in un primo è regolare (senza dimostrazione). Una varietà algebrica su un campo è regolare se e solo se l'anello locale in ciascun punto chiuso è regolare.

Differenziale di un morfismo di schemi.

Definizione e caratterizzazione degli schemi normali. Un dominio locale di dimensione 1 è regolare se e solo se è un DVR se e solo se è normale. Per uno schema integro noetheriano: regolare $\Rightarrow$ localmente fattoriale $\Rightarrow$ normale $\Rightarrow$ regolare in codimensione 1. Per uno schema integro noetheriano di dimensione 1: regolare $\Leftrightarrow$ normale. $\operatorname{Spec} k[x,y,z]/(xy-z^2)$ è normale ma non regolare. Valutazione discreta associata a un divisore primo su uno schema integro noetheriano regolare in codimensione 1.

(13) **16 Aprile 2025.** Pull-back e push-out in una categoria. Esempi nella categoria degli insiemi, degli spazi topologici, dei gruppi, dei gruppi abeliani e degli anelli (commutativi). Nella categoria delle smooth manifold non sempre esistono i prodotti fibrati: idea, ma senza dimostrazione.

Prodotto tensoriale di due algebre su un anello: definizione della moltiplicazione, proprietà universale come push-out, esempi con anelli di polinomi, quozienti, localizzazioni. Altri esempi: $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ è isomorfo a $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ via $a \otimes b \mapsto (ab, a\bar{b})$; $R[x] \otimes_R R[\![y]\!] = R[\![y]\!][x] \subsetneq R[x][\![y]\!] \subsetneq R[\![x,y]\!]$; il campo residuo $\kappa(\mathfrak{p})$ è il prodotto tensoriale $A_{\mathfrak{p}} \otimes_A A/\mathfrak{p}$.

Esistenza dei prodotti fibrati (pull-back) nella categoria degli schemi con idea della dimostrazione usando ricoprimenti aperti affini. Intersezione schematica di due sottoschemi chiusi: esempio di due curve tangenti nel piano. Definizione di spazio affine e spazio proiettivo su uno schema. Esempio del cambio base rispetto a un omomorfismo di anelli $R \to A$ rispetto a uno schema di tipo finito su R. $\operatorname{Spec} \mathbb{C} \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{R}} \operatorname{Spec} \mathbb{C}$ è isomorfo a $\operatorname{Spec} \mathbb{C} \coprod \operatorname{Spec} \mathbb{C}$, quindi lo spazio topologico soggiacente al prodotto fibrato di schemi non necessariamente è il prodotto fibrati degli spazi topologici soggiacenti.

(14) **23 Aprile 2025.** Il base change di un'immersione aperta/chiusa è un'immersione aperta/chiusa (senza dimostrazione). Se x è un punto di uno schema X, costruzione di $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \to X$ e dimostrazione del fatto che non dipende dalla scelta di un intorno aperto affine di x in X. Definizione di fibra schematica. Lo spazio topologico soggiacente alla fibra schematica è la fibra topologica: è stata dimostrata solo la bigezione nel caso affine. Esempio: fibre schematiche di $\mathbb{A}^1_k \to \mathbb{A}^1_k$ dato da $w \mapsto z^2$.

Cenni di teoria algebrica dei numeri: definizione di indice di ramificazione e grado di inerzia per ideali massimali in un'estensione finita di domini di Dedekind, la fibra generica è il punto generico. Esempio: fibre di $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[i] \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$.

Definizione di anello graduato, modulo graduato, ideale omogeneo. Esempi: $\mathbb{N}$-graduazione stadard sull'anello dei polinomi, graduazione fine sull'anello dei polinomi, $\mathbb{Z}$-graduazione su $R[x, x^{-1}]$. A_0 è un sottoanello di A (lasciato per esercizio). Shift della graduazione.

Definizione di Proj di un anello $\mathbb{N}$-graduato e topologia di Zariski su Proj. $\operatorname{Proj} R[x]$ è omeomorfo a $\operatorname{Spec} R$. Se k è un campo algebricamente chiuso, $\operatorname{Proj} k[x_0, x_1]$ è l'unione disgiunta di $\mathbb{P}^1(k)$ e un punto denso.

(15) **24 Aprile 2025.** Se A è un anello $\mathbb{N}$-graduato: (1) l'omogeneizzazione di un ideale primo è un ideale primo, (2) $V_+(I) \subseteq V_+(J)$ se e solo se $J \cap A_+ \subseteq \sqrt{I}$, (3) $\operatorname{Proj} A$ è vuoto se e solo se $A_+ \subseteq \sqrt{0}$.

Localizzazioni omogenee di un modulo graduato in un elemento omogeneo e in un primo omogeneo. Esempi di localizzazioni omogenee. Se A è un anello $\mathbb{N}$-graduato e M è un A-modulo $\mathbb{Z}$-graduato, costruzione del fascio $\tilde{M}$ su $\operatorname{Proj} A$ e proprietà (senza dimostrazione). Se f è omogeneo di grado positivo, l'aperto principale $D_+(f)$ è omeomorfo a $\operatorname{Spec} A_{(f)}$ e questo omeomorfismo identifica il fascio $\tilde{M}|_{D_+(f)}$ con il fascificato di $M_{(f)}$ (senza dimostrazione). $\operatorname{Proj} A$ è uno schema e gli aperti principali sono schemi affini.

Definizione di spazi proiettivi pesati. Carte affini di $\mathbb{P}(1,1,2)$.

Definizione di twist di Serre $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(d)$ su $\mathbb{P}^n_R = \operatorname{Proj} A$ come fascificato di $A(d)$, dove $A = R[x_0, \dots, x_n]$. La restrizione $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(d)|_{U_i}$ è isomorfo a $\mathcal{O}_{U_i}$ per ogni $i = 0, \dots, n$. Funzioni di transizione dei twist di Serre.

Un omomorfismo di anelli tra anelli $\mathbb{N}$-graduati $\varphi : C \to B$ che moltiplica il grado di $r \geq 1$ induce un morfismo di schemi $\operatorname{Proj} B \setminus V_+(\varphi(C_+)B) \to \operatorname{Proj} C$ che sugli aperti principali è dato da $C_{(h)} \to B_{\varphi(h)}$, $c/h^n \mapsto \varphi(c)/\varphi(h)^n$. Esempi: proiezione da un punto di $\mathbb{P}^2$; un omomorfismo suriettivo di anelli $\mathbb{N}$-graduati induce un'immersione chiusa. Sottoanello di Veronese d-esimo $A^{(d)}$ di un anello $\mathbb{N}$-graduato A. $\operatorname{Proj} A^{(d)}$ è isomorfo a $\operatorname{Proj} A$. Collegamento con l'immersione di Veronese classica.

(16) **30 Aprile 2025.** Definizione di proprietà di morfismi di schemi stabile per cambio base. Definizione di morfismo che gode di una proprietà universalmente. Definizione di proprietà di morfismi di schemi locale sul codominio. Il morfismo $\mathbb{A}^1_k \to \operatorname{Spec} k$ è chiuso, ma non universalmente chiuso.

Un aperto in uno schema è quasi-compatto se e solo se è unione finita di aperti affini. Definizione e caratterizzazione dei morfismi quasi-compatti. Definizione e caratterizzazione dei morfismi localmente di tipo finito, di tipo finito, affini, finiti (senza dimostrazione). Queste proprietà sono stabili per composizione e per cambio base: cenno di dimostrazione. (Contro)esempi di e implicazioni tra queste proprietà. Le varietà algebriche "schematiche" su un campo k sono esattamente i morfismi di schemi di tipo finito con target $\operatorname{Spec} k$. I morfismi finiti hanno fibre di cardinalità finita. Le immersioni chiuse sono morfismi finiti.

Se $f\colon X \to Y$ è un morfismo di tipo finito e Y è uno schema noetheriano, allora X è uno schema noetheriano. Se $f\colon X \to Y$ è un'immersione aperta e Y è uno schema noetheriano, allora f è un morfismo di tipo finito.

Diagonale di un morfismo. Definizione di morfismo separato. I morfismi affini sono separati. La retta con due origini non è separata.

Definizione di morfismo proprio. I morfismi proiettivi sono propri (senza dimostrazione). $\mathbb{P}^n_A \to \operatorname{Spec} A$ è proprio. $\mathbb{A}^n_A \to \operatorname{Spec} A$ non è proprio se $n \geq 1$. I morfismi finiti sono propri.

Criteri valutativi per morfismi separati e propri: enunciato, intuizione geometrica come unicità del limite e compattezza per successioni, dimostrazione omessa.

(17) **7 Maggio 2025.** Se X è uno schema separato sopra uno schema affine, allora l'intersezione di due aperti affini in X è affine. L'intersezione di due aperti affini potrebbe essere non affine: piano con due origini. Nella retta con due origini l'intersezione di due aperti affini è sempre affine perché la diagonale è un morfismo affine.

Definizione di geometricamente ? per una proprietà ? delle varietà algebriche. Una varietà algebrica è geometricamente ? se e solo se ogni suo cambio base rispetto a un'estensione di campi è ? (senza dimostrazione). $\operatorname{Spec} \mathbb{C}$ è integro, ma non è geometricamente connesso su $\operatorname{Spec} \mathbb{R}$. Definizione di varietà algebrica liscia come varietà algebrica geometricamente regolare.

Definizione di campo perfetto. I campi di caratteristica zero e i campi finiti sono perfetti. Il campo $\mathbb{F}_p(t)$ non è perfetto. Una varietà algebrica liscia su un campo è regolare (senza dimostrazione). Una varietà algebrica regolare su un campo perfetto è liscia (senza dimostrazione). L'estensione inseparabile di campi $\mathbb{F}_p(t) \subseteq \mathbb{F}_p(t^{1/p})$ dà luogo a una varietà algebrica su $\mathbb{F}_p(t)$ regolare e non geometricamente ridotta.

Definizione di modulo piatto; proprietà equivalenti. Un modulo piatto su un dominio è privo di torsione. Un modulo privo di torsione su un PID è piatto. Libero $\Rightarrow$ proiettivo $\Rightarrow$ piatto (senza dimostrazione). La piattezza è una proprietà locale (Teorema 7.1 in Matsumura) (senza dimostrazione).

Definizione di morfismo piatto tra schemi. Le immersioni aperte sono morfismi piatti. Un morfismo piatto tra schemi integri è dominante. Se $f\colon X \to Y$ è un morfismo dominante tra schemi integri e Y è localmente noetheriano, regolare di dimensione ≤ 1, allora f è piatto. Disuguaglianza per la dimensione delle fibre di un morfismo (senza dimostrazione). Le fibre di un morfismo piatto hanno dimensione localmente costante (senza dimostrazione). Intuizione geometrica dei morfismi piatti e suriettivi come famiglia "continua" di schemi. Il morfismo di scoppiamento di $\mathbb{A}^2_k$ nell'origine non è piatto.

Definizione di morfismo liscio o étale tra schemi localmente noetheriani. Le immersioni aperte tra schemi localmente noetheriani sono étale. Intuizione geometrica dei morfismi lisci e suriettivi come famiglia "continua" di varietà algebriche lisce. Intuizione di morfismo étale come biolomorfismo locale. Cenni sul problema della funzione implicita in geometria algebrica. Un morfismo non ramificato tra superfici di Riemann compatte è algebrico (per GAGA) ed è étale, ma non è un isomorfismo locale nella categoria algebrica, a meno che non sia un isomorfismo.

Il rivestimento doppio ramificato $\mathbb{A}^1_k \to \mathbb{A}^1_k$ è piatto e non liscio; se si toglie l'origine è étale (se k non ha caratteristica 2), ma non è un isomorfismo locale.

Cenni su una versione schematica del lemma di Sard per morfismi tra varietà algebriche su campi di caratteristica zero. Se k è un campo algebricamente chiuso di caratteristica p, discussione delle fibre $\mathbb{A}^1_k \to \mathbb{A}^1_k$ dato da $k[u] \to k[v]$ $u \mapsto v^p$.

Fibre singolari di una famiglie di cubiche piane in forma di Weierstrass: $y^2 = x^3 + t$ su $k[t]$ e $y^2 = x^3 + 55x - 100$ su $\mathbb{Z}$.

Fine del programma d'esame

(18) **8 Maggio 2025.**

Definizione di S'-punto per un S-schema, se S' è un S-schema. Confronto con il cambio base: gli S'-punti di X/S sono in corrispondenza biunivoca con gli S'-punti di $X \times_S S'/S'$. Caso affine: se R è un anello, A è una R-algebra e X è $\operatorname{Spec} R[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_m)$, allora $X(R)$ è in bigezione con il luogo degli zeri degli f_j in A^n. Caso proiettivo su un campo: se $L \supseteq k$ è un'estensione di campi e X è $\operatorname{Proj} k[x_0, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_m)$, allora $X(L)$ è in bigezione con il luogo degli zeri degli f_j in $\mathbb{P}^n(L) = (L^{n+1} \smallsetminus \{0\})/L^*$.

Confronto con i punti dello spazio topologico soggiacente a uno schema. Se k è un campo e X è uno schema su k, allora $X(k)$ è in bigezione con i punti $x \in X$ tali che l'estensione $\kappa(x) \supseteq k$ è banale. Confronto tra $\mathbb{F}_2$-punti (risp. $\mathbb{F}_4$-punti) di $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_2} \to \operatorname{Spec} \mathbb{F}_2$ e punti di $x \in \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_2}$ tali che $\kappa(x) \supseteq \mathbb{F}_2$ è un'estensione di grado 1 (risp. 2). $\mathbb{C}$-punti dell'$\mathbb{R}$-schema $\operatorname{Spec} \mathbb{C}$.

Calcolo della cardinalità di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_{q^m})$ e di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_{q^m})$. Definizione della funzione zeta per uno schema di tipo finito su $\mathbb{F}_q$. Calcolo della funzione zeta per $\mathbb{P}^n_{\mathbb{F}_q}$.

Omomorfismo di Frobenius per anelli di caratteristica $p > 0$. Morfismo di Frobenius assoluto per uno schema su $\mathbb{F}_p$. Morfismo di Frobenius geometrico per uno schema su $\mathbb{F}_q$. Azione del Frobenius geometrico sui punti chiusi. Se X è uno schema di tipo finito su $\mathbb{F}_q$ e $\overline{X} = X \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{F}_q} \operatorname{Spec} \overline{\mathbb{F}}_q$, allora $X(\mathbb{F}_q)$ coincide con il sottoinsieme di $\overline{X}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ fissato dal Frobenius geometrico.

Enunciato delle congetture di Weil. Cenno al teorema del punto fisso di Lefschetz applicata al Frobenius geometrico.

(19) **14 Maggio 2025.** Trasformazioni naturali tra funtori. Isomorfismi tra funtori. Lemma di Yoneda. Funtori rappresentabili e elementi universali. Esempio del fibrato tautologico sulla grassmanniana di $\mathbb{C}^\infty$.

co-Yoneda e funtori corappresentabili. Esempi: prodotto tensore tra due moduli, funtori rappresentati da prodotti e coprodotti.

Funtore dei punti di uno schema. Gruppi algebrici $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$, $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$, μ_n. L'insieme soggiacente a uno schema X è in bigezione con un quoziente dell'unione disgiunta degli insiemi $h_X(K)$, dove K varia tra i campi. Interpretazione funtoriale dei morfismi separati/propri e lisci/non-ramificat/étale. Cenno al problema dei moduli per curve di genere g e sottoschemi chiusi di uno schema fissato: enunciato dell'esistenza dello schema di Hilbert e dell'esigenza di allargare la categoria degli schemi agli spazi algebrici e agli stack algebrici.

(20) **15 Maggio 2025.** Definizione di fasci di $\mathcal{O}_X$-moduli su uno spazio anellato. Definizione di omomorfismo di $\mathcal{O}_X$-moduli. La spiga di un $\mathcal{O}_X$-modulo in un punto $x \in X$ è in modo naturale un $\mathcal{O}_{X,x}$-modulo. Definizione di fibra di un $\mathcal{O}_X$-modulo in un punto di uno spazio localmente anellato.

Esempi di $\mathcal{O}_X$-moduli.

Se A è un anello e M è un A-modulo, allora il fascio $\tilde{M}$ è un $\mathcal{O}_X$-modulo su $X = \operatorname{Spec} A$; inoltre il funtore $\operatorname{Mod}_A \to \operatorname{Mod}_{\mathcal{O}_X}$ è esatto e pienamente fedele.

Se A è un anello $\mathbb{N}$-graduato e M è un A-modulo $\mathbb{Z}$-graduato, allora il fascio $\tilde{M}$ è un $\mathcal{O}_X$-modulo su $X = \operatorname{Proj} A$; inoltre il funtore dalla categoria degli A-moduli $\mathbb{Z}$-graduati a $\operatorname{Mod}_{\mathcal{O}_X}$ è esatto, ma in generale non è pienamente fedele.

Nuclei, immagini e conuclei di omomorfismi di omomorfismi di $\mathcal{O}_X$-moduli sono in modo naturale degli $\mathcal{O}_X$-moduli. Definizione di fascio $\mathcal{H}om$ e fascio prodotto tensore. Aggiunzione tra Hom e prodotto tensore (senza dimostrazione). $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, F)$ è isomorfo a F.

Definizione di fascio localmente libero e di fascio invertibile. Definizione di gruppo di Picard.

Ogni fascio localmente libero sullo spettro di un anello locale è libero. Il gruppo di Picard dello spettro di un anello locale è banale.

Il gruppo di Picard dello spettro di un UFD è banale (senza dimostrazione). Se R è un UFD allora il gruppo di Picard di $\mathbb{P}^n_R$ è isomorfo a $\mathbb{Z}$ (senza dimostrazione).

Se R è un dominio di Dedekind, allora il gruppo di Picard di $\operatorname{Spec} R$ è isomorfo al gruppo delle classi di R (senza dimostrazione).

Se $(X, \mathcal{O}_X)$ è uno spazio anellato, allora l'insieme degli omomorfismi di $\mathcal{O}_X$-moduli $\mathcal{O}_X^{\oplus n} \to \mathcal{O}_X^{\oplus m}$ è in bigezione con l'insieme delle matrici $m \times n$ con entrate nell'anello $\mathcal{O}_X(X)$.

Per un fascio localmente libero, definizione di banalizzazioni locali e di matrici di transizione; condizione di cociclo. Bigezione tra fasci localmente liberi di rango r e $\mathrm{H}^1(X, \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_X))$.

Se A è un anello, M e N sono A-moduli e $X = \operatorname{Spec} A$, allora gli omomorfismi di A-moduli $M \to N$ sono in corrispondenza biunivoca con gli omomorfismi di $\mathcal{O}_X$-moduli $\tilde{M} \to \tilde{N}$.

Definizione e caratterizzazione dei fasci quasi-coerenti su uno schema (con dimostrazione).

Un esempio di fascio di ideali su $X = \mathbb{A}^1_k$ che non è quasi-coerente.

(21) **21 Maggio 2025.** Fasci quasi-coerenti di ideali e sottoschemi chiusi. Il fascio di ideali di una ipersuperficie di grado d in $\mathbb{P}^n_k$ è isomorfo a a $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-d)$.

Definizione e caratterizzazione dei fasci coerenti su uno schema localmente noetheriano (con dimostrazione)

I fasci localmente liberi di rango finito sullo spettro di un anello noetheriano A sono la stessa cosa degli A-moduli finiti proiettivi o piatti (dimostrazione parziale).

Rilevazione delle opinioni degli studenti.

Enunciato del teorema di Serre sullo svanimento della coomologia in gradi positivi di un fascio quasi-coerente sugli schemi affini. Enunciato del teorema di Leray sul confronto tra coomologia di Cech e coomologia. Se X è uno schema seperato su uno schema affine, $\mathcal{U}$ è un ricoprimento aperto affine e F è un fascio quasi-coerente allora la coomologia di Cech di F rispetto a $\mathcal{U}$ è isomorfa alla coomologia di F.

Il pushforward di un fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli lungo un morfismo di spazi anellati $X \to Y$ è in modo naturale un $\mathcal{O}_Y$-modulo. Condizioni sufficienti affinché il pushforward di un fascio quasi-coerente sia quasi-coerente (senza dimostrazione). Condizioni sufficienti affinché il pushforward di un fascio coerente sia coerente: proper

pushforward (senza dimostrazione). Se $X \to \operatorname{Spec} R$ è un morfismo proprio, R è un anello noetheriano e F è un fascio coerente, allora $\mathrm{H}^i(X, F)$ è un R-modulo finito.

Definizione di genere aritmetico per uno schema geometricamente connesso e proprio su un campo.

(22) **22 Maggio 2025.** Definizione di caratteristica di Eulero per un fascio coerente su uno schema proprio su un campo.

Pull back di un fascio di moduli lungo un morfismo di spazi anellati. Esempi: pullback di fasci localmente liberi, pullback sul gruppo di Picard, morfismi di schemi, differenza tra fibrati vettoriali olomorfi e complessi su una complex manifold. Definizione di polinomio di Hilbert e di grado per uno sottoschema chiuso di $\mathbb{P}^n_k$.

Fascio normale e fascio conormale di un'immersione chiusa di schemi; caso di un divisore di Cartier effettivo.

Differenziali di Kähler per un omomorfismo di anelli: definizione, costruzione, proprietà. Fascio dei differenziali di Kähler di un morfismo di schemi e proprietà. Sequenza conormale.

(23) **28 Maggio 2025.** Se f è un morfismo piatto di tipo finito tra schemi localmente noetheriani con fibre di dimensione pura n, allora f è liscio se e solo se Ω_f è localmente libero di rango n (solo enunciato).

Definizione del fibrato tangente per una varietà algebrica liscia su un campo.

Per uno schema X, equivalenza tra morfismi affini con target X e fasci quasi-coerenti di $\mathcal{O}_X$-algebre: costruzione dello Spec relativo. Costruzione del Proj relativo. Fibrato vettoriale schematico e proiettivizzazione di un fibrato vettoriale.

Algebra di Rees e associated graded di un ideale in un anello. Definizione di sequenza regolare. Scoppiamento di schemi localmente noetheriani lungo sottoschemi chiusi; caso di un'immersione chiusa regolare.

Spazi analitici complessi. Funtore di analitificazione da schemi di tipo finito su $\mathbb{C}$ a spazi analitici complessi e proprietà (senza dimostrazione). Analitificazione di un fascio coerente. Enunciato di GAGA di Serre. Discussione di quali compact complex manifold sono analitificazione di varietà algebriche/proiettive: cenno al teorema di immersione di Kodaira e alla nozione di Moishezon.

(24) **29 Maggio 2025.** Definizione di immersione chiusa regolare. Definizione di divisore di Cartier effettivo. Fibrato normale. Esempi di immersioni chiuse non regolari.

Un'immersione chiusa tra varietà lisce di dimensione pura è un'immersione regolare (senza dimostrazione): formula di aggiunzione. Fibrato canonico di una curva piana liscia.

Numeri di Hodge e (anti)plurigeneri di varietà lisce e proprie su un campo. Invarianza di tali numeri per estensioni del campo, tramite flat base change (senza dimostrazione). Confronto tra caratteristica zero e geometria complessa. Enunciato della dualità di Serre.

Panoramica su alcuni argomenti di geometria algebrica.

Università di Bologna
Dipartimento di Matematica
A.A. 2024/25, Secondo Semestre

Andrea Petracci
a [dot] petracci (nospam) [at] unibo [dot] it
https://www.dm.unibo.it/~andrea.petracci3/2025Schemi/

Teoria degli Schemi — Foglio di esercizi 1

Assegnato: venerdí 28 Febbraio 2025
Consegna delle soluzioni: entro mercoledí 19 Marzo 2025

Esercizio 1.1. Sia $\varphi\colon A \to B$ un omomorfismo di anelli e sia $\widetilde{\varphi}\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ l'applicazione indotta da φ.

(1) Si dimostri che per ogni ideale $J \subseteq B$ vale $\widetilde{\varphi}(\mathrm{V}(J)) \subseteq \mathrm{V}(\varphi^{-1}J)$ e che la chiusura di $\widetilde{\varphi}(\mathrm{V}(J))$ in $\operatorname{Spec} A$ è $\mathrm{V}(\varphi^{-1}J)$.
(2) Si dimostri che $\widetilde{\varphi}$ è dominante (cioè ha immagine densa) se e solo se $\ker\varphi$ consiste di elementi nilpotenti.
(3) Si dimostri che se φ è intero e iniettivo allora $\widetilde{\varphi}$ è suriettiva.
(4) Si dimostri che se φ è intero allora $\widetilde{\varphi}$ è chiusa.
(5) Se B è un A-modulo finito con un insieme di generatori di cardinalità n, allora si dimostri che la fibra di ciascun punto $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ rispetto a $\tilde{\varphi}$ ha cardinalità $\leq n$.

Esercizio 1.2. Per ciascuna delle seguenti situazioni si costruisca un esempio esplicito.

(1) $\varphi\colon A \to B$ è un omomorfismo di anelli e la mappa indotta $\widetilde{\varphi}\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ non è aperta né chiusa.
(2) k è un campo algebricamente chiuso, A e B sono domini di tipo finito su k, $\varphi\colon A \to B$ è un omomorfismo di k-algebre e la mappa indotta $\widetilde{\varphi}\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ non è aperta né chiusa.
(3) $\varphi\colon A \to B$ è un omomorfismo non suriettivo e non iniettivo di anelli e la mappa indotta $\widetilde{\varphi}\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ è un omeomorfismo.
(4) k è un campo algebricamente chiuso, A e B sono domini di tipo finito su k, $\varphi\colon A \to B$ è un omomorfismo non suriettivo di k-algebre e la mappa indotta $\widetilde{\varphi}\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ è un omeomorfismo.

Esercizio 1.3. Per ciascuna delle seguenti affermazioni si dica se è vera o se è falsa. Se è vera, si fornisca una dimostrazione. Se è falsa, si produca un controesempio esplicito.

(1) Se A è un anello di Jacobson, allora $\operatorname{Specm} A$ è denso in $\operatorname{Spec} A$.
(2) Se A è un anello noetheriano tale che $\operatorname{Specm} A$ è denso in $\operatorname{Spec} A$, allora A è un anello di Jacobson.
(3) Se k è un campo, A è una k-algebra di tipo finito e U è un sottoinsieme aperto non vuoto di $\operatorname{Spec} A$, allora U contiene un punto p tale che $\{p\}$ è chiuso in $\operatorname{Spec} A$.
(4) Se X è uno spazio topologico di Jacobson, $U \subseteq X$ è un sottoinsieme aperto e $p \in U$ è un punto tale che $\{p\}$ è chiuso in U, allora U è uno spazio topologico di Jacobson (se dotato della topologia indotta da X) e $\{p\}$ è chiuso in X.
(5) Se k è un campo e A è una k-algebra di tipo finito con un numero finito di ideali massimali, allora A è una k-algebra finita.

Esercizio 1.4. Sia A un anello, sia $\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} A$ un ideale massimale di A e sia M un A-modulo. Si dimostrino le seguenti affermazioni.

(1) Se $\sqrt{\operatorname{ann}_A(M)} \supseteq \mathfrak{m}$, allora l'omomorfismo di localizzazione $\phi\colon M \to M_{\mathfrak{m}}$ è bigettivo.
(2) Per tutti gli interi i, j tali che $0 \leq i \leq j$, $\mathfrak{m}^i A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}^j A_{\mathfrak{m}}$ è canonicamente isomorfo a $\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^j$ come A-moduli.
(3) Se $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ è tale che $\operatorname{ann}_A(M) \not\subseteq \mathfrak{p}$, allora $M_{\mathfrak{p}} = 0$.
(4) Se $S \subseteq T$ sono due sottoinsiemi moltiplicativi di A tali che per ogni $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ vale
$$\mathfrak{p} \cap S = \emptyset,\ \mathfrak{p} \supseteq \operatorname{ann}_A(M) \implies \mathfrak{p} \cap T = \emptyset,$$
allora l'omomorfismo di localizzazione $\phi\colon S^{-1}M \to T^{-1}M$ è bigettivo.
(5) Se $\mathfrak{p}$ è un ideale primo di A e $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_r$ sono ideali di A tali che
   (a) $0 = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$,
   (b) $\mathfrak{q}_1$ è $\mathfrak{p}$-primario (si veda la definizione nel capitolo 4 dell'Atiyah–Macdonald),
   (c) per ogni $j = 2, \ldots, r$, $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{q}_j$,
   allora $\mathfrak{q}_1$ coincide con il nucleo dell'omomorfismo di localizzazione $A \to A_{\mathfrak{p}}$ e $A_{\mathfrak{p}}$ è isomorfo a $(A/\mathfrak{q}_1)_{\mathfrak{p}}$ come A-algebra.
(6) Se k è un campo e A è una k-algebra finita locale, allora A è un anello artiniano e vale l'uguaglianza
$$\ell(A) \cdot \dim_k A/\mathfrak{m} = \dim_k A$$
dove $\ell(A)$ è la lunghezza di A e $\dim_k$ denota la dimensione come k-spazio vettoriale.

Può essere utile il seguente risultato che potete dare per buono.

Proposizione. *Sia k un campo e sia $A = k[x_1, \dots, x_n]$ l'anello dei polinomi in n variabili.*

- *Se $m_1, \dots, m_t, u, v$ sono monomi in A tali che $\gcd(u, v) = 1$, allora vale la seguente uguaglianza tra ideali di A:*
$$(m_1, \dots, m_t, uv) = (m_1, \dots, m_t, u) \cap (m_1, \dots, m_t, v).$$
- *Se $m_1, \dots, m_t$ sono monomi in A, allora vale la seguente uguaglianza tra ideali di A:*
$$\sqrt{(m_1, \dots, m_t)} = (\sqrt{m_1}, \dots, \sqrt{m_t}),$$
dove se $m = x_{i_1}^{a_1} \cdots x_{i_r}^{a_r}$ con $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n$ e $a_1, \dots, a_r \geq 1$ allora $\sqrt{m} := x_{i_1} \cdots x_{i_r}$. In altre parole, $\sqrt{m}$ è il prodotto delle variabili che compaiono in m.
- *Sia $I \subseteq S$ un ideale monomiale e sia $\mathcal{B}$ l'insieme minimale di generatori monomiali di I. Allora:*
  - *I è un ideale massimale se e solo se $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$;*
  - *I è un ideale primo se e solo se $\mathcal{B} \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$;*
  - *I è un ideale irriducibile se e solo esistono indici $1 \leq i_1 < \cdots < i_t \leq n$ e interi $a_1, \dots, a_t \geq 1$ tali che $\mathcal{B} = \{x_{i_1}^{a_1}, \dots, x_{i_t}^{a_t}\}$;*
  - *I è un ideale primario se e solo esistono indici $1 \leq i_1 < \cdots < i_t \leq n$, interi $a_1, \dots, a_t \geq 1$ e monomi $m_1, \dots, m_s$ tali che $\mathcal{B} = \{x_{i_1}^{a_1}, \dots, x_{i_t}^{a_t}, m_1, \dots, m_s\}$ e gli m_j coinvolgono solo le variabili $x_{i_1}, \dots, x_{i_t}$.*

Per esempio, (x^2, xy, y^2) è primario e non irriducibile (infatti $(x^2, xy, y^2) = (x, y^2) \cap (x^2, y)$); (x, y^2) è irriducibile ma non primo.

Esercizio 1.5. Si considerino i seguenti ideali di $\mathbb{C}[x, y, z]$
$$\begin{aligned} I_1 &= (x^2 - z - 1, y - 1) \\ I_2 &= (x^3, (y-1)^7, (z-1)^3) \\ I_3 &= (x^3 z, y^2 z^2, xyz) \\ I &= I_1 \cap I_2 \cap I_3 \end{aligned}$$
e si consideri l'anello $A = \mathbb{C}[x, y, z]/I$.

(1) Si determini una decomposizione primaria di I_3, piú precisamente si trovino tre ideali monomiali primari I_4, I_5, I_6 di $\mathbb{C}[x, y, z]$ tali che $I_3 = I_4 \cap I_5 \cap I_6$, $\sqrt{I_4} = (z)$, $\sqrt{I_5} = (x, y)$ e $\sqrt{I_6} = (x, z)$.
(2) Fingendo che i numeri complessi siano visualizzabili come numeri reali, si faccia un disegno del chiuso affine classico $\mathrm{Z}(I) \subseteq \mathbb{C}^3$. Inoltre si determinino le componenti irriducibili di $\mathrm{Z}(I)$ e le loro dimensioni.
(3) Si classifichino gli ideali primi di A. [Per aiutarmi nella correzione, vi chiedo di usare le seguenti notazioni per alcuni ideali di A: $\mathfrak{q}_j := I_j/I$ e $\mathfrak{p}_j := \sqrt{\mathfrak{q}_j}$, per ogni $j = 1, \dots, 6$.]
(4) Si determini la dimensione di Krull di A.
(5) Utilizzando gli esercizi precedenti, si provi che $A_{\mathfrak{p}_5}$ è isomorfo a $\mathbb{C}(z)[x, y]/(x^3, xy, y^2)$.
(6) Per ciascun primo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$,
   - si determini la dimensione di Krull di $A_{\mathfrak{p}}$,
   - si detemini la dimensione di Krull di $A/\mathfrak{p}$,
   - si dia una descrizione piú esplicita possibile del campo residuo $\kappa(\mathfrak{p})$; in particolare, si dica se è un estensione algebrica, finita, trascendente o puramente trascendente di un campo 'noto' (cioè $\mathbb{C}$ o estensioni puramente trascendenti di $\mathbb{C}$),
   - si determini il grado di trascendenza di $\kappa(\mathfrak{p})$ su $\mathbb{C}$,
   - qualora $A_{\mathfrak{p}}$ sia un anello artiniano, si determini la lunghezza $\ell(A_{\mathfrak{p}})$ di $A_{\mathfrak{p}}$ come $A_{\mathfrak{p}}$-modulo.

Università di Bologna
Dipartimento di Matematica
A.A. 2024/25, Secondo Semestre

Andrea Petracci
a [dot] petracci (nospam) [at] unibo [dot] it
https://www.dm.unibo.it/~andrea.petracci3/2025Schemi/

Teoria degli Schemi — Foglio di esercizi 2
Assegnato: mercoledí 19 Marzo 2025
Consegna delle soluzioni: mercoledí 16 Aprile 2025

Esercizio 2.1. Sia X uno spazio topologico, sia $\mathrm{Sh}(X)$ la categoria dei fasci di gruppi abeliani su X e sia $\varphi\colon F \to G$ una freccia in $\mathrm{Sh}(X)$, cioè F e G sono fasci di gruppi abeliani su X e $\varphi\colon F \to G$ è un omomorfismo di fasci. Si provi che le seguenti condizioni sono equivalenti:

(1) per ogni punto $x \in X$, $\varphi_x\colon F_x \to G_x$ è suriettivo,
(2) per ogni aperto $U \subseteq X$ e per ogni sezione $g \in G(U)$, esistono un ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i\in I}$ di U e delle sezioni $f_i \in F(U_i)$ per ciascun $i \in I$, tali che $\varphi_{U_i}(f_i) = g|_{U_i}$ per ogni $i \in I$,
(3) φ è un epimorfismo in $\mathrm{Sh}(X)$, cioè: per ogni fascio $H \in \mathrm{Sh}(X)$ e per ogni coppia di omomorfismi di fasci $\psi\colon G \to H$ e $\psi'\colon G \to H$ tali che $\psi \circ \varphi = \psi' \circ \varphi$, si ha $\psi = \psi'$,
(4) per ogni fascio $H \in \mathrm{Sh}(X)$ e per ogni omomorfismo di fasci $\psi\colon G \to H$ tale che $\psi \circ \varphi = 0$, si ha $\psi = 0$.

Esercizio 2.2.

(1) Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spazio localmente anellato, sia $U \subseteq X$ un sottoinsieme aperto. Se $\mathcal{O}_X(U) = 0$ allora si provi che $U = \emptyset$.
(2) Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spazio localmente anellato, sia $U \subseteq X$ un sottoinsieme aperto e sia $f \in \mathcal{O}_X(U)$ una sezione. Si consideri $Z = \{x \in U \mid f(x) = 0 \text{ in } \kappa(x)\}$. Si provi che Z è chiuso in U.

Definizione. Se F è un fascio di gruppo abeliani su uno spazio topologico X, allora definiamo il *supporto* di F come $\operatorname{Supp} F := \{x \in X \mid F_x \neq 0\}$.

Esercizio 2.3. Sia A un anello, sia $X = \operatorname{Spec} A$, sia M un A-modulo e sia $\widetilde{M}$ il fascio su X indotto da M.

(1) Si provi il contenimento $\operatorname{Supp} \widetilde{M} \subseteq \mathrm{V}(\operatorname{ann}_A(M))$.
(2) Si provi che se M è un A-modulo finito allora $\operatorname{Supp} \widetilde{M} = \mathrm{V}(\operatorname{ann}_A(M))$.
(3) Si fornisca un esempio in cui $\operatorname{Supp} \widetilde{M} \subsetneqq \mathrm{V}(\operatorname{ann}_A(M))$.
(4) Se $I \subseteq A$ è un ideale e M è un A/I-modulo, allora M è in modo naturale un A-modulo e il fascio $\widetilde{M}$ da lui indotto su $X = \operatorname{Spec} A$ è tale che $\operatorname{Supp} \widetilde{M} \subseteq \mathrm{V}(I)$.
(5) Se A è un dominio e K è il suo campo delle frazioni, allora si provi che il fascio $\widetilde{K}$ (indotto dall'A-modulo K) è il fascio costante di gruppo K ed è un fascio grattacielo (rispetto a quale punto?). Qual è il suo supporto?
(6) Se $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ è un ideale primo con campo residuo $\kappa(\mathfrak{p})$, allora si provi che il fascio $F := \widetilde{\kappa(\mathfrak{p})}$ (indotto dall'A-modulo $\kappa(\mathfrak{p})$ è un fascio grattacielo rispetto a un punto.

Esercizio 2.4. (Qui costruiamo l'incollamento di fasci per un ricoprimento aperto fatto da due elementi – per la trattazione del caso generale si rimanda all'Esercizio 2.2.8 del libro di Liu.) Sia X uno spazio topologico e siano U_0 e U_1 due aperti di X tali che $X = U_0 \cup U_1$. Per brevità si ponga $U_{01} = U_0 \cap U_1$. Si consideri il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} U_{01} & \xrightarrow{i_0} & U_0 \\ \downarrow{\scriptstyle i_1} & & \downarrow{\scriptstyle j_0} \\ U_1 & \xrightarrow{j_1} & X \end{array}$$

dato dalle inclusioni. Sia k un anello, sia F_0 un fascio di k-moduli su U_0 e sia F_1 un fascio di k-moduli su U_1. Supponiamo di avere un isomorfismo di fasci di k-moduli

$$\phi\colon F_0|_{U_{01}} \to F_1|_{U_{01}}.$$

(a) Si provi che esistono un fascio di k-moduli F su X e degli isomorfismi di fasci di k-moduli $\psi_0\colon F|_{U_0} \to F_0$ e $\psi_1\colon F|_{U_1} \to F_1$ tali che $\phi \circ \psi_0|_{U_{01}} = \psi_1|_{U_{01}}$.
(b) Si provi che la terna (F, ψ_0, ψ_1) è unica a meno di isomorfismo; piú precisamente vale la seguente implicazione: se F' è un fascio di k-moduli su X e $\psi_0'\colon F'|_{U_0} \to F_0$ e $\psi_1'\colon F'|_{U_1} \to F_1$ sono isomorfismi di fasci di k-moduli tali che $\phi \circ \psi_0'|_{U_{01}} = \psi_1'|_{U_{01}}$ allora esiste un isomorfismo $\alpha\colon F \to F'$ di fasci di k-moduli tale che $\psi_0 = \psi_0' \circ \alpha|_{U_0}$ e $\psi_1 = \psi_1' \circ \alpha|_{U_1}$.

Il fascio F si dice *incollamento* dei fasci F_0 e F_1 tramite ϕ. (Attenzione: il fascio F dipende dalla scelta di ϕ!)

Esercizio 2.5. Sia k un campo algebricamente chiuso. Lavoriamo adesso nel contesto geometria algebrica 'classica', cioè nella categoria delle varietà quasi-proiettive 'classiche' su k. Per ogni varietà quasi-proiettiva 'classica' X, sia $\mathcal{O}_X$ il fascio delle funzioni regolari su X.

Inoltre, in questo esercizio quando si scrive fascio (o sottofascio) si intende fascio (o sottofascio) di k-spazi vettoriali.

Si consideri $\mathbb{P}^1$ la retta proiettiva 'classica' sul campo k con coordinate omogenee x_0, x_1, dotata della topologia di Zariski. Siano $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$ e $U_1 = \{x_1 \neq 0\}$ le due carte affini standard di $\mathbb{P}^1$. Sia $x = \frac{x_1}{x_0}$ (risp. $y = \frac{x_0}{x_1}$) la coordinata affine standard di U_0 (risp. U_1). Si ponga $U_{01} = U_0 \cap U_1$.

(1) Si determini esplicitamente $\Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$ e se ne determini la dimensione come k-spazio vettoriale.
(2) Si fissi $d \in \mathbb{Z}$. Si consideri l'isomorfismo di fasci

$$\phi\colon \mathcal{O}_{U_0}|_{U_{01}} = \mathcal{O}_{U_{01}} \longrightarrow \mathcal{O}_{U_1}|_{U_{01}} = \mathcal{O}_{U_{01}}$$

definito dalla moltiplicazione per x^{-d}; piú precisamente per ogni aperto $U \subseteq U_{01}$ l'omomorfismo k-lineare $\phi_U\colon \mathcal{O}_{U_0}(U) \to \mathcal{O}_{U_1}(U)$ è dato dalla moltiplicazione per $(x|_U)^{-d}$. Sia F il fascio su $\mathbb{P}^1$ ottenuto incollando $\mathcal{O}_{U_0}$ e $\mathcal{O}_{U_1}$ tramite ϕ. Si determini la dimensione di $\Gamma(\mathbb{P}^1, F)$ come k-spazio vettoriale.
(3) Si fissi $e \in \mathbb{N}$. Sia G_0 il sottofascio di $\mathcal{O}_{U_0}$ cosí definito: per ogni aperto $U \subseteq U_0$, $G_0(U)$ è l'ideale dell'anello $\mathcal{O}_{U_0}(U)$ generato da $(x|_U)^e$. Sia G_1 il fascio su U_1 coincidente con $\mathcal{O}_{U_1}$; in questo modo G_1 è un sottofascio di $\mathcal{O}_{U_1}$.
   (a) Si provi che G_0 e G_1 possono essere incollati a un fascio G su $\mathbb{P}^1$ in modo tale che esista un omomorfismo iniettivo di fasci $\lambda\colon G \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ tale che le restrizioni $\lambda|_{U_0}$ e $\lambda|_{U_1}$ siano i precedenti omomorfismi iniettivi di fasci $G_0 \hookrightarrow \mathcal{O}_{U_0}$ e $G_1 = \mathcal{O}_{U_1}$.
   (b) Si determini $d \in \mathbb{Z}$ tale che G sia isomorfo al fascio F costruito in (2).
   (c) Si descriva esplicitamente il fascio Q dato dal conucleo (nella categoria dei fasci) dell'omomorfismo iniettivo $\lambda\colon G \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$. Q è un fascio grattacielo? Se sí, rispetto a quale punto di $\mathbb{P}^1$?
   (d) Si calcoli la dimensione di $\Gamma(\mathbb{P}^1, Q)$ come k-spazio vettoriale.
   (e) Si dica per quali $e \in \mathbb{N}$ la successione esatta corta di fasci

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{\lambda} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

induce una successione esatta corta sulle sezioni globali

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathbb{P}^1, G) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{P}^1, Q) \longrightarrow 0.$$

Esercizio 2.6.

(1) Sia $f\colon X \to Y$ una funzione continua tra spazi topologici. Sia F un fascio di gruppi abeliani. Sia $x \in X$ e sia $\nu_x\colon (f_*F)_{f(x)} \to F_x$ l'omomorfismo "naturale" definito a lezione.
   (a) Si provi che se f è un'immersione topologica allora ν_x è un isomorfismo.
   (b) Si dia un esempio in cui ν_x è iniettivo e non suriettivo.
   (c) Si dia un esempio in cui ν_x è suriettivo e non iniettivo.
(2) Si dia un esempio in cui $(f, f^\#)\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ è un morfismo di schemi e $x \in X$ è un punto tale che $(f_*F)_{f(x)}$ non è un anello locale.
(3) Sia $(f, f^\#)\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morfismo di spazi localmente anellati tale che $f\colon X \to Y$ sia un'immersione topologica aperta. Allora si provi che le seguenti condizioni sono equivalenti:
   (a) $f^\#|_{f(X)}\colon \mathcal{O}_Y|_{f(X)} \to (f_*\mathcal{O}_X)|_{f(X)}$ è un isomorfismo di fasci su $f(X)$,
   (b) per ogni aperto $W \subseteq f(X)$, $f^\#_W\colon \mathcal{O}_Y(W) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}W)$ è un isomorfismo,
   (c) per ogni aperto $U \subseteq X$, $f^\#_{f(U)}\colon \mathcal{O}_Y(f(U)) \to \mathcal{O}_X(U)$ è un isomorfismo,
   (d) l'omomorfismo $f^\flat\colon f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$, definito da $f^\flat_U = f^\#_{f(U)}\colon (f^{-1}\mathcal{O}_Y)(U) \to \mathcal{O}_X(U)$ per ogni aperto $U \subseteq X$, è un isomorfismo di fasci su X,
   (e) per ogni punto $x \in X$, $f^\#_x\colon \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ è un isomorfismo,
   (f) per ogni punto $x \in X$, $f^\#_{f(x)}\colon \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to (f_*\mathcal{O}_X)_{f(x)}$ è un isomorfismo.

   Se (ogn)una delle condizioni sopra è soddisfatta allora si dice che $(f, f^\#)$ è un'immersione aperta.
(4) Si dia un esempio in cui $(f, f^\#)\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ è un'immersione aperta di schemi e $f^\#\colon \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ non è un isomorfismo di fasci su Y.
(5) Sia $(f, f^\#)\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morfismo di spazi localmente anellati tale che $f\colon X \to Y$ sia un'immersione topologica chiusa. Allora si provi che le seguenti condizioni sono equivalenti:
   (a) $f^\#\colon \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ è un epimorfismo di fasci su Y,
   (b) per ogni punto $y \in Y$, $f^\#_y\colon \mathcal{O}_{Y,y} \to (f_*\mathcal{O}_X)_y$ è suriettivo,
   (c) per ogni punto $x \in X$, $f^\#_{f(x)}\colon \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to (f_*\mathcal{O}_X)_{f(x)}$ è suriettivo,
   (d) per ogni punto $x \in X$, $f^\#_x\colon \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ è suriettivo.

Se (ogn)una delle condizioni sopra è soddisfatta allora si dice che $(f, f^\#)$ è un'immersione chiusa.

(6) Si dia un esempio in cui $(f, f^\#)\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ è un'immersione chiusa di schemi e $V \subseteq Y$ è un aperto tale che $f^\#_V\colon \mathcal{O}_Y(V) \to (f_*\mathcal{O}_X)(V)$ non è suriettivo.

(7) Si dia un esempio in cui $(f, f^\#)\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ è un morfismo di schemi tale che f è un omeomorfismo, $(f, f^\#)$ non è un'immersione aperta di schemi, $(f, f^\#)$ non è un'immersione chiusa di schemi.

Esercizio 2.7.

(1) Sia X uno schema affine tale che $\mathcal{O}_X(X)$ è un anello ridotto, sia Y uno schema affine, siano $f\colon X \to Y$ e $g\colon X \to Y$ due morfismi di schemi, sia $U \subseteq X$ un aperto denso. Supponendo che valga l'uguaglianza $f|_U = g|_U$ come morfismi di schemi $U \to Y$, si dimostri che $f = g$ come morfismi di schemi $X \to Y$.

(2) Si provi, esibendo un controesempio, che la conclusione nel punto (1) è falsa se $\mathcal{O}_X(X)$ non è ridotto.

(3) Si provi, esibendo un controesempio, che la conclusione nel punto (1) è falsa se Y non è affine.

(4) Si costruisca esplicitamente un esempio che soddisfa le seguenti proprietà: $f\colon X \to Y$ e $g\colon X \to Y$ sono morfismi di schemi, f e g sono diversi, le funzioni continue soggiacenti a f e g sono uguali.

Università di Bologna
Dipartimento di Matematica
A.A. 2024/25, Secondo Semestre

Andrea Petracci
a [dot] petracci (nospam) [at] unibo [dot] it
https://www.dm.unibo.it/~andrea.petracci3/2025Schemi/

Teoria degli Schemi — Foglio di esercizi 3
Assegnato: sabato 10 Maggio 2025
Consegna delle soluzioni: entro 29 Maggio 2025

Esercizio 3.1. Sia $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} A_i$ un anello $\mathbb{N}$-graduato. Sia $A_+ = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}^+} A_i$ l'ideale irrilevante. Si consideri l'A_0-schema $X = \operatorname{Proj} A$.

(1) Si provi che $1 \in A$ è omogeneo di grado 0, cioè $1 \in A_0$. [In questo modo A_0 è un sottoanello di A.]
(2) Si considerino le seguenti condizioni:
   (a) A è un anello noetheriano,
   (b) A_0 è un anello noetheriano e A_+ è un ideale finitamente generato di A,
   (c) A_0 è un anello noetheriano e A è di tipo finito su A_0,
   (d) A_0 è un anello noetheriano e per ogni $i \in \mathbb{N}$ A_i è un A_0-modulo finito.

   Per ciascuna coppia ordinata di condizioni, si dica se vale l'implicazione: in caso positivo si fornisca una dimostrazione, in caso negativo si fornisca un controesempio. [Suggerimento: sfogliate il capitolo 10 dell'Atiyah–MacDonald.]
(3) Sia d un intero positivo e sia $A^{(d)}$ il d-esimo sottoanello di Veronese di A, cioè $A^{(d)} = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} A_{id}$ con $\mathbb{N}$-graduazione data da $\deg_{A^{(d)}} f = i$ se $f \in A_{id}$. In altre parole, $A^{(d)}$ è il sottoanello di A costituito dagli elementi in cui compaiono parti omogenee di gradi multipli di d, ma la graduazione su $A^{(d)}$ è ottenuta dividendo per d la graduazione di A. Si provi che se A è un anello noetheriano allora $A^{(d)}$ è un anello noetheriano. [Suggerimento: usate il lemma di Artin–Tate.]
(4) Sia $f \in A$ un elemento omogeneo di grado $d > 0$. Si costruisca un omomorfismo suriettivo di A_0-algebre $A^{(d)} \to A_{(f)}$.
(5) Si provi che se A è un anello noetheriano allora X è uno schema noetheriano.
(6) Si provi che se A è un dominio e $A_+ \neq 0$ allora X è uno schema integro.
(7) Si costruisca un esempio in cui A non è ridotto e X è uno schema integro. [Si ricorda che $\emptyset$ è riducibile e sconnesso.]

Definizione. Sia A un anello, sia $f \in A$ un elemento e sia $I \subseteq A$ un ideale. Allora si pone

$$(I : f) = \{a \in A \mid af \in I\},$$
$$(I : f^\infty) = \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } af^n \in I\}.$$

Esercizio 3.2. Sia $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} A_i$ un anello $\mathbb{N}$-graduato. Sia $A_+ = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}^+} A_i$ l'ideale irrilevante. Si consideri l'A_0-schema $X = \operatorname{Proj} A$. Siano I e J due ideali omogenei di A e siano $Z_I = \operatorname{Proj} A/I$ e $Z_J = \operatorname{Proj} A/J$ i corrispondenti sottoschemi chiusi di $X = \operatorname{Proj} A$.

(1) Sia $f \in A_+$ omogeneo di grado $d > 0$ e sia $D_+(f) \subseteq X$ l'aperto principale corrispondente. Si considerino le seguenti affermazioni:
   (a) $Z_I \cap D_+(f)$ è un sottoschema chiuso di $Z_J \cap D_+(f)$,
   (b) $J \cap A^{(d)} \subseteq (I : f^\infty)$,
   (c) $J \subseteq (I\colon f^\infty)$.

   Si provino le implicazioni (a)⇔(b)⇐(c). Si osservi che se $d = 1$ allora vale anche (b)⇒(c). Si esibisca un esempio per cui $d \geq 2$, (b) vale e (c) non vale.
(2) Si ponga
$$\overline{I} = \{a \in A \mid \forall f \in A_+ \text{ omogeneo}, \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } af^n \in I\}.$$
   Si provi che $\overline{I}$ è un ideale omogeneo di A.
(3) Se A_+ è un ideale finitamente generato di A e $\{f_1, \dots, f_r\}$ è un insieme di suoi generatori omogenei, allora si dimostri l'uguaglianza
$$\overline{I} = \left\{a \in A \mid \exists m \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall j = 1, \dots, r,\ af_j^m \in I\right\}.$$
(4) Assumendo che l'ideale A_+ sia generato da un numero finito di elementi omogenei di grado 1, si provi che Z_I è un sottoschema chiuso di Z_J se e solo se $J \subseteq \overline{I}$.
(5) Si provi il contenimento $\overline{I} \cap A_+ \subseteq \sqrt{I}$.
(6) Se A_0 è un campo e I è un ideale radicale tale che $I \subsetneqq A_+$, allora si provi che I è saturo, cioè $I = \overline{I}$.
(7) Se A_0 è un campo, allora si costruisca una bigezione tra l'insieme dei sottoinsiemi chiusi di $\operatorname{Proj} A$ e l'insieme degli ideali radicali omogenei di A contenuti in A_+.

(8) Si faccia un esempio, con $A_0 = k$ campo, $n \geq 1$ e $A = k[x_0, \ldots, x_n]$ anello polinomiale con $\mathbb{N}$-graduazione standard, in cui I e J non sono radicali e vale $0 \subsetneqq I \subsetneqq J \subsetneqq \overline{I} \subsetneqq A_+$. Potete scegliere $n \geq 1$.

Esercizio 3.3. Sia k un campo di caratteristica diversa da 2. Sia $\overline{k}$ una chiusura algebrica di k. Sia $g \geq 0$ un intero. Sia $F \in k[x_0, x_1]$ un polinomio omogeneo di grado $2g + 2$. Si consideri il k-schema $X = \operatorname{Proj} k[x_0, x_1, y]/(y^2 - F(x_0, x_1))$ dove $\deg x_0 = \deg x_1 = 1$ e $\deg y = g + 1$.

(1) Si provi che X è liscio su k se e solo se il polinomio omogeneo F ha $2g + 2$ radici distinte in $\mathbb{P}^1(\overline{k})$, cioè se esistono $[a_1 : b_1], \ldots, [a_{2g+2} : b_{2g+2}] \in \mathbb{P}^1(\overline{k})$ a due a due distinti tali che $F = \lambda \prod_{i=1}^{2g+2}(b_i x_0 - a_i x_1)$ per qualche $\lambda \in \overline{k}^*$.
(2) Si provi che la composizione dell'inclusione $k[x_0, x_1] \hookrightarrow k[x_0, x_1, y]$ con la suriezione $k[x_0, x_1, y] \twoheadrightarrow k[x_0, x_1, y]/(y^2 - F(x_0, x_1))$ induce un morfismo di k-schemi $\pi \colon X \to \mathbb{P}^1_k$.
(3) Si dica se π è un morfismo finito.
(4) Si studi la fibra tramite π di ogni punto di $\mathbb{P}^1_k$ nel seguente caso: $k = \mathbb{C}$, $g = 1$, $F = x_0 x_1 (x_0 - x_1)(x_0 + x_1)$. Qual è la dimensione (di Krull) della fibra? La fibra è ridotta? La fibra è affine?
(5) Si dica se π è un morfismo piatto.
(6) Si dica se π è un morfismo liscio.
(7) Si provi che i fasci di k-spazi vettoriali $\pi_* \mathcal{O}_X$ e $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(-g - 1)$ sono isomorfi.
(8) Si determini la dimensione di $\mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X)$ come k-spazio vettoriale.
(9) (Facoltativo – non dà punti aggiuntivi; solo per chi sa già la coomologia dei fasci quasi-coerenti) Si determini la dimensione di $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X)$ come k-spazio vettoriale.

Esercizio 3.4. Sia k un campo. Nel seguito le variabili menzionate x_i hanno grado 1.

(1) Si provi che, per $a, b \in \mathbb{N}^+$, $\mathbb{P}^1_k$ e $\mathbb{P}(a, b)_k$ sono k-schemi isomorfi.
(2) Si provi che $\mathbb{P}^1_k$ e $\operatorname{Proj} k[x_0, x_1, x_2]/(x_0^2 - x_1 x_2)$ sono k-schemi isomorfi.
(3) Si provi che $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ e $\operatorname{Proj} \mathbb{R}[x_0, x_1, x_2]/(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)$ non sono $\mathbb{R}$-schemi isomorfi.
(4) Si provi che $\mathbb{P}(1, 1, 2)_k$ e $\operatorname{Proj} k[x_0, x_1, x_2, x_3]/(x_0^2 - x_1 x_2)$ sono k-schemi isomorfi.
(5) Si provi che $\mathbb{P}(1, 1, 2)_k$ e $\mathbb{P}^2_k$ non sono k-schemi isomorfi.
(6) Si provi che non esiste alcun polinomio omogeneo $f \in k[x_0, x_1, x_2, x_3]$ tale che $\operatorname{Proj} k[x_0, x_1, x_2, x_3]/(f)$ e $\mathbb{P}(1, 1, 3)_k$ sono k-schemi isomorfi.
(7) Si provi che $\mathbb{P}^1_k \times_{\operatorname{Spec} k} \mathbb{P}^1_k$ e $\operatorname{Proj} k[x_0, x_1, x_2, x_3]/(x_0 x_1 - x_2 x_3)$ sono k-schemi isomorfi. [Qui basta spiegare un po', senza verificare tutti i dettagli.]
(8) Si dica quali dei seguenti $\mathbb{Q}$-schemi sono isomorfi:
   (a) $\operatorname{Proj} \mathbb{Q}[x_0, x_1, x_2]/(x_1^2 - x_2^2)$,
   (b) $\operatorname{Proj} \mathbb{Q}[x_0, x_1, x_2]/(x_1^2 - 2x_2^2)$,
   (c) $\operatorname{Proj} \mathbb{Q}[x_0, x_1, x_2]/(x_0^2 - x_1 x_2)$,
   (d) $\operatorname{Proj} \mathbb{Q}[x_0, x_1, x_2]/(x_0^2 + 9x_1^2 - 6x_1 x_2 + x_2^2)$,
   (e) $\operatorname{Proj} \mathbb{Q}[x_0, x_1, x_2]/(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)$,
   (f) $\operatorname{Proj} \mathbb{Q}[x_0, x_1, x_2]/(x_0^2)$,
   (g) $\operatorname{Proj} \mathbb{Q}[x_0, x_1, x_2]/(x_0 x_1)$.
(9) Si dica quali dei seguenti $\mathbb{R}$-schemi sono isomorfi:
   (a) $\operatorname{Proj} \mathbb{R}[x_0, x_1, x_2]/(x_1^2 - x_2^2)$,
   (b) $\operatorname{Proj} \mathbb{R}[x_0, x_1, x_2]/(x_1^2 - 2x_2^2)$,
   (c) $\operatorname{Proj} \mathbb{R}[x_0, x_1, x_2]/(x_0^2 - x_1 x_2)$,
   (d) $\operatorname{Proj} \mathbb{R}[x_0, x_1, x_2]/(x_0^2 + 9x_1^2 - 6x_1 x_2 + x_2^2)$,
   (e) $\operatorname{Proj} \mathbb{R}[x_0, x_1, x_2]/(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)$.
(10) Si dica quali dei seguenti $\mathbb{C}$-schemi sono isomorfi:
   (a) $\operatorname{Proj} \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]/(x_1^2 - x_2^2)$,
   (b) $\operatorname{Proj} \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]/(x_1^2 - 2x_2^2)$,
   (c) $\operatorname{Proj} \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]/(x_0^2 - x_1 x_2)$,
   (d) $\operatorname{Proj} \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]/(x_0^2 + 9x_1^2 - 6x_1 x_2 + x_2^2)$,
   (e) $\operatorname{Proj} \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]/(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)$.

[Per aiutarmi nella correzione, vi chiedo di usare le seguenti notazioni: in (1) $\mathbb{P}(a, b)_k = \operatorname{Proj} k[y, z]$ dove $\deg y = a$ e $\deg z = b$; in (4) e (5) $\mathbb{P}(1, 1, 2)_k = \operatorname{Proj} k[y_0, y_1, z]$ dove $\deg y_0 = \deg y_1 = 1$ e $\deg z = 2$; in (6) $\mathbb{P}(1, 1, 3)_k = \operatorname{Proj} k[y_0, y_1, z]$ dove $\deg y_0 = \deg y_1 = 1$ e $\deg z = 3$ e $u_1 = \frac{y_0^3}{z}$, $u_2 = \frac{y_0^2 y_1}{z}$, $u_3 = \frac{y_0 y_1^2}{z}$, $u_4 = \frac{y_1^3}{z}$.]

Esercizio 3.5. Si considerino i seguenti ideali di $\mathbb{C}[x,y,z]$

$$\begin{aligned} I_1 &= (x^2 - z - 1) \\ I_2 &= (x^4, x^3y^2, y^3, (z-2)^3) \\ I_3 &= (xz, y^3, z^2) \\ I &= I_1 \cap I_2 \cap I_3 \end{aligned}$$

e si consideri l'anello $A = \mathbb{C}[x,y,z]/I$.

(1) Si determini una decomposizione primaria di I_3, piú precisamente si trovino due ideali monomiali primari I_4, I_5 di $\mathbb{C}[x,y,z]$ tali che $I_3 = I_4 \cap I_5$, $\sqrt{I_4} = (y,z)$ e $\sqrt{I_5} = (x,y,z)$.
(2) Fingendo che i numeri complessi siano visualizzabili come numeri reali, si faccia un disegno del chiuso affine classico $\mathrm{Z}(I) \subseteq \mathbb{C}^3$. Inoltre si determinino le componenti irriducibili di $\mathrm{Z}(I)$ e le loro dimensioni.
(3) Si classifichino gli ideali primi di A. [Per aiutarmi nella correzione, vi chiedo di usare le seguenti notazioni per alcuni ideali di A: $\mathfrak{q}_j := I_j/I$ e $\mathfrak{p}_j := \sqrt{\mathfrak{q}_j}$, per ogni $j = 1, \dots, 5$.]
(4) Si determini la dimensione di Krull di A.
(5) Si trovi una presentazione di $A_{\mathfrak{p}_5}$ come quoziente di un anello di polinomi sul campo $\mathbb{C}(x)$ modulo un ideale monomiale.
(6) Per ciascun primo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$,
   - si determini la dimensione di Krull di $A_{\mathfrak{p}}$,
   - si determini la dimensione di immersione di $A_{\mathfrak{p}}$,
   - si dica se $A_{\mathfrak{p}}$ è un anello regolare,
   - si detemini la dimensione di Krull di $A/\mathfrak{p}$,
   - si dia una descrizione piú esplicita possibile del campo residuo $\kappa(\mathfrak{p})$; in particolare, si dica se è un estensione algebrica, finita, trascendente o puramente trascendente di un campo 'noto' (cioè $\mathbb{C}$ o estensioni puramente trascendenti di $\mathbb{C}$),
   - si determini il grado di trascendenza di $\kappa(\mathfrak{p})$ su $\mathbb{C}$,
   - qualora $A_{\mathfrak{p}}$ sia un anello artiniano, si determini la lunghezza $\ell(A_{\mathfrak{p}})$ di $A_{\mathfrak{p}}$ come $A_{\mathfrak{p}}$-modulo.
(7) Si determini un ideale J di A tale che $\mathrm{V}(J)$ è il luogo dei punti non regolari dello schema $\operatorname{Spec} A$.

Esercizio 3.6. Si consideri $\mathbb{Q}[x_0,x_1,x_2]$ con la $\mathbb{N}$-graduazione standard. Si considerino i seguenti sottoschemi chiusi di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}}$:

$$\begin{aligned} X &= \operatorname{Proj} \mathbb{Q}[x_0,x_1,x_2]/(4x_0x_1^2 + x_0x_2^2 - 6x_0^2x_2), \\ Y &= \operatorname{Proj} \mathbb{Q}[x_0,x_1,x_2]/(x_1^2 - x_0x_2), \\ Z &= X \times_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}}} Y. \end{aligned}$$

(1) Si dica se X è uno schema regolare e si determinino i punti non regolari di X.
(2) Si dica se X è ridotto.
(3) Si dica se Z è affine.
(4) Si dica se Z è ridotto.
(5) Si calcoli $\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{H}^0(Z, \mathcal{O}_Z)$.
(6) (Facoltativo – non dà punti aggiuntivi; solo per chi sa già la coomologia dei fasci quasi-coerenti) Si provi che $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Q}$ è geometricamente connesso.

Definizione. Sia A un anello, sia B una A-algebra e sia M un B-modulo. Una *A-derivazione di B in M* è un omomorfismo A-lineare $\delta\colon B \to M$ che soddisfa la regola di Leibniz: $\forall b_1, b_2 \in B,\ \delta(b_1b_2) = b_2\delta(b_1) + b_1\delta(b_2)$. L'insieme delle A-derivazioni di B in M si denota con $\operatorname{Der}_A(B,M)$.

Esercizio 3.7.

(1) Sia A un anello, sia B una A-algebra e sia M un B-modulo. Si provi che se δ è una A-derivazione di B in M, allora δ si annulla sugli elementi di B che provengono da A. [Suggerimento: cos'è $\delta(1)$?]
(2) Siano $i\colon A \to B$ e $\alpha\colon B \to C$ due omomorfismi di anelli. Sia N un C-modulo. Sul C-modulo $C \oplus N$ si consideri il prodotto dato da

$$(c_1, n_1) \cdot (c_2, n_2) = (c_1c_2, c_1n_2 + c_2n_1)$$

per ogni $c_1, c_2 \in C$ e $n_1, n_2 \in N$. In questo modo $C \oplus N$ è una C-algebra tramite $c \mapsto (c,0)$. Si consideri l'omomorfismo suriettivo di C-algebre $\beta\colon C \oplus N \to C$ dato da $(c,n) \mapsto c$.
   (a) Si provi che per ogni $n \in N$ l'elemento $(0,n)$ è nilpotente in $C \oplus N$.
   (b) Si costruisca una bigezione tra $\operatorname{Der}_A(B,N)$ e l'insieme

$$\left\{ \varphi \in \operatorname{Hom}_{(\mathrm{Alg}_A)}(B, C \oplus N) \mid \beta \circ \varphi = \alpha \right\}.$$

(3) Sia k un campo. Si consideri la k-algebra $k[t]/(t^2)$: si denoti con ε l'immagine di t, ovvero la classe $t+(t^2) \in k[t]/(t^2)$, e si denoti con $k[\varepsilon]$ questa k-algebra. Talvolta $k[\varepsilon]$ viene chiamata la k-algebra dei numeri duali. Si denoti con β l'omomorfismo suriettivo di k-algebre $k[\varepsilon] \to k$ definito da $\varepsilon \mapsto 0$.
   (a) Sia B una k-algebra locale e sia $\mathfrak{m}$ l'ideale massimale di B. Supponiamo che il campo residuo di B sia k, ovvero la composizione $k \hookrightarrow B \twoheadrightarrow B/\mathfrak{m}$ sia un isomorfismo di anelli. (Si denoti con α la proiezione al quoziente $B \twoheadrightarrow B/\mathfrak{m} = k$ e si denoti con π la proiezione al quoziente $\mathfrak{m} \twoheadrightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.) Si costruiscano esplicitamente delle bigezioni naturali tra i seguenti tre insiemi:
      (i) $\mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, k)$,
      (ii) $\mathrm{Der}_k(B, k)$,
      (iii) l'insieme degli omomorfismi $\varphi\colon B \to k[\varepsilon]$ di k-algebre tali che $\alpha = \beta \circ \varphi$.
   (b) Sia X uno schema su k. Si costruisca una bigezione tra i seguenti due insiemi:
      (i) $\mathrm{Hom}_{(\mathrm{Sch}/k)}(\operatorname{Spec} k[\varepsilon], X)$, che è l'insieme dei morfismi di k-schemi da $\operatorname{Spec} k[\varepsilon]$ a X,
      (ii) $\{(x, v) \mid x \in X \text{ tale che } \kappa(x) = k,\ v \in T_{X,x}\}$, che è l'insieme delle coppie (x, v), dove x è un punto k-razionale di X e v è un vettore tangente a X in x.

Esercizio 3.8. Sia k un campo.

(1) Si consideri la k-algebra
$$S = k[x, y, x_0, x_1]/(xx_1 - yx_0)$$
con $\mathbb{N}$-graduazione data da $\deg x = \deg y = 0$ e $\deg x_0 = \deg x_1 = 1$. Si consideri il k-schema $X = \operatorname{Proj} S$.
   (i) Si provi che X è l'unione di due aperti isomorfi a $\mathbb{A}^2_k$. (Per il seguito, è una buona idea dare dei nomi a queste due copie di $\mathbb{A}^2_k$ e alle loro coordinate standard.)
   (ii) Si consideri il piano affine $\mathbb{A}^2_k = \operatorname{Spec} k[x, y]$ e si consideri il morfismo di k-schemi $\pi\colon X \to \mathbb{A}^2_k$ dato dall'inclusione di k-algebre $k[x, y] \hookrightarrow S$. Si provi che π è un morfismo proiettivo.
   (iii) Si determini esplicitamente la fibra rispetto a π di qualsiasi punto k-razionale di $\mathbb{A}^2_k$. In particolare, se E è la fibra del punto k-razionale di $\mathbb{A}^2_k$ corrispondente all'ideale massimale (x, y) di $k[x, y]$, allora si provi che esiste un isomorfismo di k-schemi $\varphi\colon \mathbb{P}^1_k \to E$.
   (iv) Si provi che esiste un aperto non vuoto $V \subseteq \mathbb{A}^2_k$ tale che la restrizione $\pi|_{\pi^{-1}(V)}\colon \pi^{-1}(V) \to V$ è un isomorfismo di k-schemi. Si determini il piú grande aperto V che soddisfa questa proprietà.
   (v) Si dica se π è un morfismo piatto.
   (vi) (Facoltativo – non dà punti aggiuntivi; solo per chi sa già i fasci quasi-coerenti) Sia $\mathcal{I}$ il fascio di ideali su X che corrisponde all'immersione chiusa $i\colon E \hookrightarrow X$, cioè $\mathcal{I} = \ker(i^{\#}\colon \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_E)$. Si consideri l'$\mathcal{O}_X$-modulo quoziente $\mathcal{C} = \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$. Si determini $d \in \mathbb{Z}$ tale che $\mathcal{C}$ sia isomorfo come $\mathcal{O}_X$-modulo a $i_*\varphi_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(d)$.

(2) Si considerino le k-algebre $A = k[x, y, z]/(xy - z^2)$ e
$$S = k[x, y, z, x_0, x_1, x_2]/(xy - z^2, x_0x_1 - x_2^2, yx_0 - xx_1, zx_0 - xx_2, zx_1 - yx_2)$$
con $\mathbb{N}$-graduazione data da $\deg x = \deg y = \deg z = 0$ e $\deg x_0 = \deg x_1 = \deg x_2 = 1$. Si ponga $X = \operatorname{Proj} S$.
   (a) Si provi che X è l'unione di due aperti isomorfi a $\mathbb{A}^2_k$.
   (b) Si consideri la superficie $\operatorname{Spec} A$ e si consideri il morfismo di k-schemi $\pi\colon X \to \operatorname{Spec} A$ dato dall'inclusione di k-algebre $A \hookrightarrow S$. Si determini esplicitamente la fibra rispetto a π di qualsiasi punto k-razionale di $\operatorname{Spec} A$. In particolare, se E è la fibra del punto k-razionale di $\operatorname{Spec} A$ corrispondente all'ideale massimale $Ax + Ay + Az$ di A, allora si provi che esiste un isomorfismo di k-schemi $\varphi\colon \mathbb{P}^1_k \to E$.
   (c) Si provi che esiste un aperto non vuoto $V \subseteq \operatorname{Spec} A$ tale che la restrizione $\pi|_{\pi^{-1}(V)}\colon \pi^{-1}(V) \to V$ è un isomorfismo di k-schemi. Si determini il piú grande aperto V che soddisfa questa proprietà.
   (d) $\operatorname{Spec} A$ è un k-schema liscio? X è un k-schema liscio?
   (e) (Facoltativo – non dà punti aggiuntivi; solo per chi sa già i fasci quasi-coerenti) Sia $\mathcal{I}$ il fascio di ideali su X che corrisponde all'immersione chiusa $i\colon E \hookrightarrow X$. Si consideri l'$\mathcal{O}_X$-modulo quoziente $\mathcal{C} = \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$. Si determini $d \in \mathbb{Z}$ tale che $\mathcal{C}$ sia isomorfo come $\mathcal{O}_X$-modulo a $i_*\varphi_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(d)$.

Esercizio 3.9.

(1) Sia k un campo e sia $\bar{k}$ la chiusura algebrica di k. Siano $a, b \in k$ e sia $f = x^3 + ax + b \in k[x]$. Sia $f' = 3x^2 + a \in k[x]$ la derivata di f. Si provi che le seguenti affermazioni sono equivalenti:
   (a) f e f' hanno un fattore irriducibile in comune in $k[x]$,
   (b) esiste $\alpha \in \bar{k}$ tale che $f(\alpha) = 0$ e $f'(\alpha) = 0$,
   (c) $4a^3 + 27b^2 = 0$ in k.

(2) Sia k un campo di caratteristica diversa da 2. Siano $a, b \in k$. Si consideri il k-schema
$$X = \operatorname{Proj} k[x_0, x_1, x_2]/(x_0x_2^2 - x_1^3 - ax_0^2x_1 - bx_0^3)$$
con $\deg x_0 = \deg x_1 = \deg x_2 = 1$. Si provi che X è liscio su k se e solo se $4a^3 + 27b^2 \neq 0$.

(3) Sia k un campo di caratteristica diversa da 2 e da 3. Sia $Y \hookrightarrow \mathbb{P}^2_k$ il sottoschema chiuso definito da un polinomio omogeneo non nullo di grado 3 in x_0, x_1, x_2. Supponiamo che Y sia liscio su k. Sia $L \hookrightarrow \mathbb{P}^2_k$ una retta, cioè il sottoschema chiuso definito da un polinomio omogeneo non nullo di grado 1 in x_0, x_1, x_2. Sia $p \in \mathbb{P}^2_k(k)$ un punto k-razionale tale che $\{p\} = Y(k) \cap L(k)$ e $Y \times_{\mathbb{P}^2_k} L$ sia isomorfo a $\operatorname{Spec} k[t]/(t^3)$. Allora si provi che esiste un automorfismo di k-schemi $\varphi\colon \mathbb{P}^2_k \to \mathbb{P}^2_k$ tale che

$$\varphi(Y) = \operatorname{Proj} k[x_0, x_1, x_2]/(x_0x_2^2 - x_1^3 - ax_0^2x_1 - bx_0^3)$$

con $a, b \in k$ tali che $4a^3 + 27b^2 \neq 0$ e $\varphi(p) = [0 : 0 : 1]$. [Suggerimento: leggete l'Esercizio 3.34 nel libro *Geometria proiettiva, Problemi risolti e richiami di teoria* di Fortuna, Frigerio, Pardini.]

(4) Si consideri il morfismo di schemi

$$\pi\colon X = \operatorname{Proj} \mathbb{Z}[x_0, x_1, x_2]/(x_0x_2^2 - x_1^3 + 2x_0^2x_1 - x_0^3) \to Y = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$$

con $\deg x_i = 1$.

(a) Qual è la dimensione di ciascuna fibra di π?
(b) Si dica se π è piatto.
(c) Si dica se π è liscio.
(d) Si determini il piú grande aperto $U \subseteq Y$ tale che $X_U = X \times_Y U \to U$ è liscio.

(5) Sia k un campo di caratteristica diversa da 2. Si consideri il morfismo di schemi

$$\pi\colon X = \operatorname{Proj} k[t, x_0, x_1, x_2]/(x_0x_2^2 - x_1(x_1 - x_0)(x_1 - tx_0)) \to Y = \mathbb{A}^1_k = \operatorname{Spec} k[t]$$

con $\deg x_i = 1$ e $\deg t = 0$.

(a) Si dica se π è piatto.
(b) Si dica se π è liscio.
(c) Si determini il piú grande aperto $U \subseteq Y$ tale che $X_U = X \times_Y U \to U$ è liscio.