Anelli di Cohen-Macaulay
e il teorema di Cayley-Bacharach

Andrea Petracci

4 Maggio 2011

Sia M un A–modulo. Una sequenza $x_1, \dots, x_n$ di elementi di A si dice una **sequenza regolare per M** (in breve una **M–sequenza**) se:

- x_i non è un divisore di zero per $M/(x_1, \dots, x_{i-1})M$, per ogni $i = 1, \dots, n$;
- $(x_1, \dots, x_n)M \subsetneqq M$.

È importante l'ordine!

Teorema (Rees, 1956)

Siano I un ideale di A e M un A–modulo finito tali che $IM \subsetneqq M$. Se N è un A–modulo finito tale che $\sqrt{I} = \sqrt{\operatorname{ann} N}$, allora ogni M–sequenza massimale in I ha lunghezza uguale a

$$\min\{i \geq 0 \mid \operatorname{Ext}^i_A(N, M) \neq 0\}.$$

Se I è un ideale tale che $IM \subsetneqq M$, la lunghezza di una qualsiasi M–sequenza massimale nell'ideale I si dice **profondità** di M su I: $\operatorname{depth}(I, M)$.
Se $IM = M$, $\operatorname{depth}(I, M) = \infty$.

- Se M è un A–modulo finito e I è un ideale di A, allora

$$\operatorname{depth}(I, M) = \inf \{\operatorname{depth}(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}, M_{\mathfrak{p}}) \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{V}(I)\}$$

- Se $\underline{x} = x_1, \ldots, x_n \subset I$ è una M–sequenza, allora

$$\operatorname{depth}(I, M/\underline{x}M) = \operatorname{depth}(I, M) - n.$$

Teorema (profondità negli anelli locali)

Se $(A, \mathfrak{m})$ è un anello locale, allora

$$\operatorname{depth}(\mathfrak{m}, A) \leq \min_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} A} \dim A/\mathfrak{p} \leq \max_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} A} \dim A/\mathfrak{p} = \dim A.$$

Teorema (profondità e altezza)

Se I è un ideale proprio di A, allora

$$\operatorname{depth}(I, A) \leq \operatorname{height} I.$$

Un anello locale $(A, \mathfrak{m})$ si dice **di Cohen-Macaulay** se $\operatorname{depth}(\mathfrak{m}, A) = \dim A$.

Se $(A, \mathfrak{m})$ è un anello locale di Cohen-Macaulay, allora:

- per ogni $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} A$, $\operatorname{depth}(\mathfrak{m}, A) = \dim A/\mathfrak{p} = \dim A$;
- se I è un ideale proprio di A, allora $\operatorname{depth}(I, A) = \operatorname{height} I$ e $\operatorname{height} I + \dim A/I = \dim A$;
- se $x_1, \dots, x_r \in \mathfrak{m}$, allora sono equivalenti:
  - (i) $x_1, \dots, x_r$ sono una A–sequenza;
  - (ii) $\operatorname{height}(x_1, \dots, x_i) = i$ per $i = 1, \dots, r$;
  - (iii) $\operatorname{height}(x_1, \dots, x_r) = r$;
  - (iv) $\{x_1, \dots, x_r\}$ è sottoinsieme di un insieme di parametri per A.

Un anello A si dice **di Cohen-Macaulay** se, per ogni $\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} A$, $A_{\mathfrak{m}}$ è un anello di Cohen-Macaulay locale.

Teorema

Sono equivalenti:

(i) A è di Cohen-Macaulay;

(ii) per ogni $r \geq 1$, se I è un ideale proprio di A, generato da r elementi e con height $I = r$, allora I è unmixed.

(iii) $\operatorname{depth}(I, A) = \operatorname{height} I$, per ogni ideale proprio I;

Se A è un anello di Cohen-Macaulay, allora:

- A non ha primi associati immersi;
- se S è un insieme moltiplicativo di A, allora $S^{-1}A$ è un anello di Cohen-Macaulay;
- $A[x]$ è un anello di Cohen-Macaulay;
- A è universalmente catenario;
- se $\underline{x}$ è una A–sequenza, allora $A/(\underline{x})$ è un anello di Cohen-Macaulay.

Un anello locale $(A, \mathfrak{m}, k)$ si dice **di Gorenstein** se $\operatorname{inj\,dim} A < \infty$.

Teorema

Se $(A, \mathfrak{m}, k)$ è un anello locale con $\dim A = n$, allora sono equivalenti:

(i) A è di Gorenstein;

(ii) $\operatorname{inj\,dim} A = n$;

(iii) $\operatorname{Ext}^n_A(k, A) \simeq k$ e $\operatorname{Ext}^i_A(k, A) = 0$ per $i \neq n$;

(iv) $\operatorname{Ext}^n_A(k, A) \simeq k$ e A è di Cohen-Macaulay.

Un anello A si dice **di Gorenstein** se $A_{\mathfrak{m}}$ è un anello di Gorenstein locale per ogni $\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} A$.

Se A è un anello di Gorenstein, allora:

- A è un anello di Cohen-Macaulay;
- per ogni $S \subseteq A$ insieme moltiplicativo, $S^{-1}A$ è un anello di Gorenstein;
- $A[x]$ è un anello di Gorenstein;
- se $\underline{x}$ è una A–sequenza, allora $A/(\underline{x})$ è un anello di Gorenstein.

Sia $(A, \mathfrak{m}, k)$ un anello locale artiniano di Gorenstein. Allora:

- $\mathrm{Hom}_A(k, A) = \mathrm{Ext}^0_A(k, A) \simeq k$;
- $\mathrm{Hom}_A(k, A) \simeq \mathrm{ann}\,\mathfrak{m}$;
- se r è tale che $\mathfrak{m}^r \neq 0$ e $\mathfrak{m}^{r+1} = 0$, allora $\mathrm{ann}\,\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^r$.

$\mathrm{ann}\,\mathfrak{m}$ si chiama **socle** di A e si indica con $\mathrm{Soc}\,A$.

Proposizione

Sia $(A, \mathfrak{m}, k)$ un anello artiniano locale di Gorenstein. Se $k \subseteq A$ e $\phi \colon A \to \operatorname{Soc} A$ è una qualunque mappa k–lineare che estende l'identità di $\operatorname{Soc} A$, allora la composizione

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \colon A \times A \xrightarrow{\cdot} A \xrightarrow{\phi} \operatorname{Soc} A \simeq k$$

è una forma k–bilineare non degenere del k–spazio vettoriale A.

<u>Dimostrazione</u>: Sia r tale che $\mathfrak{m}^r = \operatorname{Soc} A$. Sia $a \in A \setminus \{0\}$, allora esiste l tale che $a\mathfrak{m}^l \neq 0$ e $a\mathfrak{m}^{l+1} = 0$.
Prendiamo $b \in \mathfrak{m}^l$ tale che $ab \neq 0$. Poiché $ab\mathfrak{m} \subseteq a\mathfrak{m}^{l+1} = 0$, $ab \in \operatorname{Soc} A$, quindi $\langle a, b \rangle \neq 0$. $\square$

Sia $S = k[x_0, \ldots, x_n]$. Sia M un S–modulo graduato finitamente generato. La **funzione di Hilbert** di M è la funzione $h_M \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da

$$h_M(j) = \dim_k M_j \qquad \text{per } j \in \mathbb{N}.$$

La **serie di Hilbert** di M è la serie formale

$$P_M(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (\dim_k M_j) t^j \in \mathbb{Z}[[t]].$$

Teorema (Hilbert-Serre)

- Esiste $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ tale che $P_M(t) = f(t)/(1-t)^{n+1}$.
- Esiste $H_M(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tale che $H_M(j) = h_M(j)$ per $j \gg 0$.
- $\dim \mathrm{V}_+(\mathrm{ann}\, M) = \deg H_M = \ \text{pole.ord}_{t=1} P_M(t) - 1$.

$H_M \in \mathbb{Q}[t]$ è detto il **polinomio di Hilbert** di M.

Proposizione (Intersezioni complete)

Siano $F_1, \ldots, F_r$ polinomi omogenei in $k[x_0, \ldots, x_n]$ di gradi $d_1, \ldots, d_r > 0$. Sia

$$A = k[x_0, \ldots, x_n]/(F_1, \ldots, F_r);$$

Allora sono equivalenti:

(i) $F_1, \ldots, F_r$ è una successione regolare;

(ii) $P_A(t) = \prod_{i=1}^{r}(1 - t^{d_i})/(1 - t)^{n+1}$;

(iii) $\dim \operatorname{Proj} A = n - r$.

Corollario

Sia $F_0, \dots, F_n$ una sequenza regolare di polinomi omogenei di $k[x_0, \dots, x_n]$ di gradi $d_0, \dots, d_n > 0$. Sia

$$A = k[x_0, \dots, x_n]/(F_0, \dots, F_n)$$

e sia $s = \sum_{i=0}^{n} d_i - n - 1$. Allora

- A è un anello artiniano locale di Gorenstein;
- $P_A(t) = \prod_{i=0}^{n}(1 + t + t^2 + \cdots + t^{d_i - 1})$;
- $\dim_k A = d_0 \cdots d_n$;
- $\operatorname{Soc} A = A_s$.

Teorema (Lasker)

Sia $F_1, \dots, F_r$ una sequenza regolare di polinomi omogenei di $k[x_0, \dots, x_n]$ e sia $X = \operatorname{Proj} k[x_0, \dots, x_n]/(F_1, \dots, F_r) \subseteq \mathbb{P}^n_k$. Allora $I(X) = (F_1, \dots, F_r)$.

Se $X \subseteq \mathbb{P}^n_k$ è un sottoschema chiuso con $\dim X = 0$, il **fallimento di imporre condizioni indipendenti** sulle ipersuperfici di grado r è il numero

$$\begin{aligned}\rho_X(r) &= \deg X - h_X(r)\\ &= \deg X - (\dim_k S_r - \dim_k I(X)_r).\end{aligned}$$

Teorema (Cayley-Bacharach)

Sia $F_1, \ldots, F_n$ una sequenza regolare di polinomi omogenei di gradi $d_1, \ldots, d_n > 0$ e sia

$$X = \operatorname{Proj} k[x_0, \ldots, x_n]/(F_1, \ldots, F_n) \subseteq \mathbb{P}^n_k.$$

Sia X' un sottoschema chiuso di X e sia X'' il "sottoschema residuo" di X' in X.
Sia $m = \sum_{i=1}^n d_i - n - 1$.
Se $0 \leq r \leq m$, allora

$$\dim_k I(X')_r - \dim_k I(X)_r = \rho_{X''}(m - r)$$

X è uno schema affine, di Gorenstein e con dimensione zero. Per Lasker, $I(X) = (F_1, \ldots, F_n)$.

Sia $X' \subseteq X$ un sottoschema chiuso. Allora, prendendo in ogni anello locale $\mathcal{O}_{X,x}$ l'ortogonale all'ideale corrispondente al sottoschema X', costruiamo un sottoschema chiuso X'' che si dice **sottoschema residuo** di X' in X.

È chiaro che $\deg X = \deg X' + \deg X''$.

Sia L un iperpiano che non interseca X. Poniamo

$$R = k[x_0, \dots, x_n]/I(X) \qquad \overline{R} = R/(L)$$
$$R' = k[x_0, \dots, x_n]/I(X') \qquad \overline{R'} = R'/(L).$$

Dall'esattezza di $0 \to R[-1] \xrightarrow{L} R \longrightarrow \overline{R} \to 0$, segue che $h_R(i) = h_{\overline{R}}(i) + h_R(i-1)$ e quindi $h_R(i) = \sum_{j=0}^{i} h_{\overline{R}}(j)$.

In modo analogo, $h_{R'}(i) = \sum_{j=0}^{i} h_{\overline{R'}}(j)$.

Dall'esattezza di $0 \to \overline{I'} \to \overline{R} \to \overline{R'} \to 0$, segue che $h_{\overline{R}}(j) - h_{\overline{R'}}(j) = \dim_k \overline{I'}_j$.

Quindi

$$h_R(i) - h_{R'}(i) = \sum_{j=0}^{i} \dim_k \overline{I'}_j.$$

Per ogni i, $\rho_{X''}(i) = \deg X'' - h_{R'}(i)$.
Quindi

$$\begin{aligned}\rho_{X''}(i) - \rho_{X''}(i+1) &= h_{R'}(i+1) - h_{R'}(i)\\ &= h_{\overline{R'}}(i+1).\end{aligned}$$

Allora

$$\rho_{X''}(i) = \rho_{X''}(i+1) + h_{\overline{R'}}(i+1).$$

Perciò

$$\rho_{X''}(i) = \sum_{j=i+1}^{\infty} h_{\overline{R'}}(j).$$

$\overline{R}$ è un anello artiniano locale di Gorenstein con $\operatorname{Soc}\overline{R} = \overline{R}_s$, dove $s = (1 + \sum_{i=1}^n d_i) - n - 1 = \sum_{i=1}^n d_i - n$.

$\overline{I'}$ e $\overline{I''}$ sono uno l'ortogonale dell'altro rispetto alla forma bilineare $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \overline{R} \times \overline{R} \to \overline{R} \to \overline{R}_s \simeq k$.

Allora, per $0 \leq j \leq s$, l'ortogonale di $\overline{I'}_j$ è

$$\overline{R}_0 \oplus \cdots \oplus \overline{R}_{s-j-1} \oplus \overline{I''}_{s-j} \oplus \overline{R}_{s-j+1} \oplus \cdots \oplus \overline{R}_s;$$

quindi

$$\dim_k \overline{I'}_j = \dim_k \overline{R}_{s-j} - \dim_k \overline{I''}_{s-j}.$$

(1) $h_R(i) - h_{R'}(i) = \sum_{j=0}^{i} \dim_k \overline{I'}_j$;
(2) $\rho_{X''}(t) = \sum_{j=t+1}^{\infty} h_{\overline{R''}}(j)$;
(3) $s = \sum_{i=1}^{n} d_i - n$;
(4) $\dim_k \overline{I'}_j = \dim_k \overline{R''}_{s-j}$ per $0 \leq j \leq s$.

Se $0 \leq r \leq s$, allora

$$\begin{aligned}
\dim_k(I(X')/I(X))_r &= h_R(r) - h_{R'}(r) \\
&= \sum_{j=0}^{r} \dim_k \overline{I'}_j \\
&= \sum_{j=s-r}^{s} \dim_k \overline{R''}_j \\
&= \sum_{j=s-r}^{\infty} \dim_k \overline{R''}_j \\
&= \rho_{X''}(s-r+1).
\end{aligned}$$

Teorema (Cayley-Bacharach, versione classica)

Siano $X_1, \dots, X_n$ delle ipersuperfici in $\mathbb{P}^n_k$ di gradi $d_1, \dots, d_n > 0$ che si intersecano trasversalmente in X.
Supponiamo che X sia l'unione disgiunta di X' e X''.
Sia $S = k[x_0, \dots, x_n]$ e sia $m = \sum_{i=1}^n d_i - n - 1$.
Se $0 \leq r \leq m$, allora

$$\dim_k I(X')_r - \dim_k I(X)_r = \#X'' - \dim_k S_{m-r} + \dim_k I(X'')_{m-r}.$$

Teorema (Bacharach, 1886)

Siano C_1, C_2 due curve in $\mathbb{P}^2_k$ di gradi d_1 e d_2 tali che si intersecano in $d_1 d_2$ punti distinti.
Sia $X = C_1 \cap C_2$ e supponiamo che X sia l'unione disgiunta dei sottoinsiemi X' e X''.
Sia $m = d_1 + d_2 - 3$.
Se $0 \leq r \leq m$, allora

$$\dim_k I(X')_r - \dim_k I(X)_r = \#X'' - \binom{m-r+2}{2} + \dim_k I(X'')_{m-r}$$

Teorema (Chasles, 1885)

Siano $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}^2$ due cubiche che si intersecano in nove punti distinti $p_1, \dots, p_9$. Se $C \subset \mathbb{P}^2$ è una cubica che passa per $p_1, \dots, p_8$, allora C passa anche per p_9.

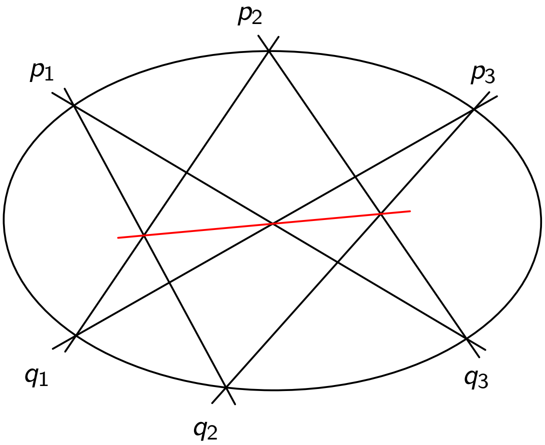
Dimostrazione: applichiamo il teorema di Bacharach. $d_1 = d_2 = 3$, $X = C_1 \cap C_2 = \{p_1, \dots, p_9\}$, $X' = \{p_1, \dots, p_8\}$, $X'' = \{p_9\}$, $m = 3$. Per $r = 3$, abbiamo

$$\begin{aligned} \dim_k I(X')_3 - \dim_k I(X)_3 &= \#X'' - \binom{3-3+2}{2} + \dim_k I(X'')_0 \\ &= 1 - 1 + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Quindi ogni polinomio di grado 3 che si annulla su X' si annulla su tutto X. $\square$

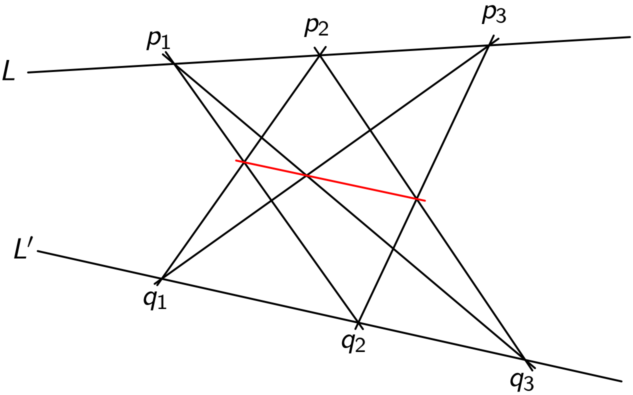
Teorema (Pascal, 1640)

Se un esagono è iscritto in una conica in $\mathbb{P}^2$, allora i lati opposti dell'esagono si incontrano in tre punti allineati.



Teorema (Pappo, IV sec. d.C.)

Siano L e L' due rette in $\mathbb{P}^2$. Siano p_1, p_2, p_3 punti distinti su L e siano q_1, q_2, q_3 punti distinti su L', tutti distinti dal punto $L \cap L'$. Allora i tre punti $\overline{p_1 q_2} \cap \overline{p_2 q_1}$, $\overline{p_1 q_3} \cap \overline{p_3 q_1}$, $\overline{p_2 q_3} \cap \overline{p_3 q_2}$ sono allineati.



Bibliografia

- W. Bruns, J. Herzog,, *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge Univ. Press, 1993.
- D. Eisenbud, *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Springer-Verlag GTM 150, 1995.
- D. Eisenbud, M. Green, J. Harris, *Cayley-Bacharach theorems and conjectures*, Bull. Amer. Math. Soc. 33, 1996.
- D. Eisenbud, J. Harris, *The geometry of schemes*, Springer-Verlag GTM 197, 2000.
- R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag GTM 52, 1977.
- H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Cambridge Univ. Press, 1986.