Scuola Normale Superiore di Pisa

Esame di licenza

Il luogo iperellittico nello stack dei moduli delle curve lisce di dato genere

29 Maggio 2013

Allievo
Andrea Petracci

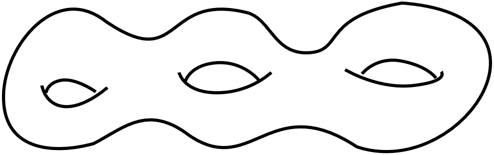
Relatore
Prof. Angelo Vistoli

Piano della presentazione:

1. Problemi di moduli
2. $\mathcal{M}_g$, lo stack delle curve lisce di genere g
3. $\mathcal{H}_g$, lo stack delle curve iperellittiche di genere g, è un sottostack chiuso di $\mathcal{M}_g$
4. Gli spazi di moduli M_g e H_g

Una **curva** liscia di genere g è una curva X proiettiva, liscia, geometricamente connessa su un campo k e tale che $\dim_k \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X) = g$.

Se $k = \mathbb{C}$, una curva liscia di genere g è una superficie di Riemann compatta di genere g.



Problema

Esiste uno "spazio" che "classifica" le curve lisce di genere g?

Informalmente, su $\mathbb{C}$, un tale spazio classificante $\mathbb{M}_g$ dovrebbe avere la proprietà seguente:

$$\begin{aligned}\{\text{punti di } \mathbb{M}_g\} &\simeq \{\text{curve lisce proiettive complesse di genere } g\}/\text{isom.}\\ &\simeq \{\text{strutture complesse su } \Sigma_g\},\end{aligned}$$

dove Σ_g è la superficie reale compatta orientabile di genere g.

<u>Moduli di Riemann</u>:

- $\dim \mathbb{M}_0 = 0$: uniformizzazione;
- $\dim \mathbb{M}_1 = 1$: l'invariante j classifica le curve ellittiche;
- $\dim \mathbb{M}_g = 3g - 3$, se $g \geq 2$.

Per dare una definizione corretta di $\mathbb{M}_g$ abbiamo bisogno del concetto di famiglia.
Una **famiglia** di curve lisce di genere g è un morfismo di schemi $X \to S$ proprio, piatto, di presentazione finita, le cui fibre sono curve lisce di genere g.

Formalmente, uno spazio che classifica le curve lisce di genere g è uno schema $\mathbb{M}_g$ con una famiglia $\mathbb{X}_g \to \mathbb{M}_g$ di curve lisce di genere g **universale**, cioè tale che se $X \to S$ è una famiglia di curve lisce di genere g allora esiste un unico morfismo di schemi $f: S \to \mathbb{M}_g$ tale che il seguente diagramma è cartesiano.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{X}_g \arrow[d] \\ S \arrow[r, "f"] & \mathbb{M}_g \end{tikzcd}$$

In altre parole,

$$\mathrm{Hom}(S, \mathbb{M}_g) \simeq \{\text{famiglie di curve lisce di genere } g \text{ su } S\}/\text{isom.},$$

per ogni schema S, funtorialmente in S.

Si dice che $\mathbb{M}_g$ **rappresenta** il funtore $(\mathrm{Sch})^{\mathrm{op}} \to (\mathrm{Set})$ definito da:

$$S \mapsto \{\text{famiglie di curve lisce di genere } g \text{ su } S\}/\text{isom.}.$$

Ma un tale $\mathbb{M}_g$ non esiste!

Due possibilità:

1. si considerano oggetti "geometrici" più generali degli schemi che possano tenere conto degli automorfismi, in modo da aver garantita la proprietà universale
$\rightsquigarrow$ **stack**: $\mathcal{M}_g$;
2. si cerca lo schema più vicino a risolvere il problema e quindi si indebolisce la proprietà universale
$\rightsquigarrow$ **spazio di moduli "coarse"**: M_g.

Un *insieme* è una categoria in cui ogni freccia è l'identità di un qualche oggetto. Un **gruppoide** è una categoria in cui ogni freccia è un isomorfismo.

Ora generalizziamo il concetto di *funtore* $(\mathrm{Sch})^{\mathrm{op}} \to (\mathrm{Set})$. Uno **pseudo-funtore** $\mathcal{X} \colon (\mathrm{Sch})^{\mathrm{op}} \to (\mathrm{Gruppoidi})$ è una struttura costituita da:

- ad ogni schema S è associato un gruppoide $\mathcal{X}(S)$;
- ad ogni morfismo di schemi $f \colon S \to T$ è associato un funtore $f^* \colon \mathcal{X}(T) \to \mathcal{X}(S)$, detto di pull-back;
- ad ogni schema S è associato un isomorfismo $\mathrm{id}_S^* \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{X}(S)}$ di funtori $\mathcal{X}(S) \to \mathcal{X}(S)$;
- ad ogni coppia di morfismi $f \colon S \to T$, $g \colon T \to U$ è associato un isomorfismo $(g \circ f)^* \simeq f^* \circ g^*$ di funtori $\mathcal{X}(U) \to \mathcal{X}(S)$;

che soddisfano delle condizioni di compatibilità.

Esiste un approccio diverso che è quello delle categorie fibrate in gruppoidi. Gli pseudo-funtori formano una 2-categoria che ha i prodotti fibrati.

Ad ogni schema X è associato il funtore rappresentabile $\mathrm{Hom}(-, X)\colon (\mathrm{Sch})^{\mathrm{op}} \to (\mathrm{Set})$.

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{Sch}) &\subseteq \{\text{funtori } (\mathrm{Sch})^{\mathrm{op}} \to (\mathrm{Set})\} \subseteq \\
&\subseteq \{\text{pseudo-funtori } (\mathrm{Sch})^{\mathrm{op}} \to (\mathrm{Gruppoidi})\}
\end{aligned}
$$

Lemma di Yoneda: se Y è uno schema e $\mathcal{X}$ è uno pseudo-funtore, allora

$$\mathcal{X}(Y) \simeq \{\text{morfismi } Y \to \mathcal{X}\}.$$

$\mathcal{M}_g$ è lo pseudo-funtore $(\mathrm{Sch})^{\mathrm{op}} \to (\mathrm{Gruppoidi})$ così definito:

- per ogni schema S, $\mathcal{M}_g(S)$ è il gruppoide delle famiglie di curve lisce di genere g sopra S;
- per ogni morfismo $f\colon S \to T$, $f^*\colon \mathcal{M}_g(T) \to \mathcal{M}_g(S)$ è il pull-back lungo f.

$\mathcal{M}_g$ risolve "tautologicamente" il problema dei moduli delle curve lisce di genere g: per il lemma di Yoneda, per ogni schema S,

$$\{\text{morfismi } S \to \mathcal{M}_g\} \simeq \mathcal{M}_g(S) = \{\text{curve lisce di genere } g \text{ su } S\}.$$

Adesso bisogna far vedere che si può *fare della geometria* su $\mathcal{M}_g$. Vedremo che le proprietà degli schemi hanno senso per una classe particolare di pseudo-funtori, gli *stack algebrici*, e faremo vedere che $\mathcal{M}_g$ è uno stack algebrico.

Uno pseudo-funtore $\mathcal{X}\colon (\mathrm{Sch})^{\mathrm{op}} \to (\mathrm{Gruppoidi})$ è uno **stack** se è un "fascio di gruppoidi" rispetto alla topologia étale di (Sch), cioè se:

1. dati uno schema S e oggetti $\xi, \eta \in \mathcal{X}(S)$, il funtore degli isomorfismi $\mathbf{Isom}_S(\xi, \eta)\colon (\mathrm{Sch}/S)^{\mathrm{op}} \longrightarrow (\mathrm{Set})$ è un fascio rispetto alla topologia étale;
2. dati un ricoprimento étale $\{S_i \to S\}$, $\xi_i \in \mathcal{X}(S_i)$ e isomorfismi $\xi_j|_{S_i \times_S S_j} \simeq \xi_i|_{S_i \times_S S_j}$ che soddisfano la condizione di cociclo, allora esiste $\xi \in \mathcal{X}(S)$ con isomorfismi $\xi|_{U_i} \simeq \xi_i$ che inducono gli isomorfismi dati.

Ogni schema è uno stack.

Teorema

Se $g \neq 1$, allora $\mathcal{M}_g$ è uno stack.

Infatti sulle curve di genere $g \neq 1$ c'è un fascio molto ampio naturale:

- il tricanonico $\omega^{\otimes 3}$ se $g \geq 2$;
- l'anticanonico $\omega^{\vee}$ se $g = 0$.

Un morfismo di stack $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ è **rappresentabile** se per ogni schema U e ogni morfismo $U \to \mathcal{Y}$ il prodotto fibrato $\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} U$ è uno schema.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} U \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[d] \\
\mathcal{X} \arrow[r] & \mathcal{Y}
\end{tikzcd}$$

Se P è una proprietà di morfismi di schemi stabile per cambio base, ha senso definire la proprietà P per un morfismo rappresentabile di stack.

Uno **stack algebrico** è uno stack $\mathcal{X}$ tale che:

1. la diagonale $\Delta\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ è rappresentabile,

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Isom}_S(\xi,\eta) \arrow[r] \arrow[d] & S \arrow[d, "(\xi{,}\eta)"] \\ \mathcal{X} \arrow[r, "\Delta"] & \mathcal{X} \times \mathcal{X} \end{tikzcd}$$

   o equivalentemente ogni morfismo da uno schema a $\mathcal{X}$ è rappresentabile;

2. la diagonale $\Delta\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ è separata e quasi-compatta;
3. esistono uno schema X e un morfismo liscio surgettivo $X \to \mathcal{X}$. Un tale X si dice un *atlante liscio*.

Teorema

Se $g \neq 1$, $\mathcal{M}_g$ è uno stack algebrico.

Via teoria dello schema di Hilbert.

Uno stack algebrico $\mathcal{X}$ si dice **di Deligne-Mumford** se soddisfa una delle seguenti condizioni equivalenti:

1. esistono uno schema X e un morfismo étale surgettivo $X \to \mathcal{X}$. Un tale X si dice un *atlante étale*.
2. il morfismo diagonale $\Delta \colon \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ è non ramificato.

$$(\text{Pseudofuntori}) \supseteq (\text{Stack}) \supseteq (\text{Stack.alg}) \supseteq (\text{StackDM}) \supseteq (\text{Sch})$$

Teorema

Se $g \geq 2$, $\mathcal{M}_g$ è uno stack di Deligne-Mumford con diagonale finita.

- *Non ramificata*: se $(X \to \operatorname{Spec} k) \in \mathcal{M}_g(\operatorname{Spec} k)$,

$$\mathrm{T}_{\mathrm{id}}\mathbf{Aut}_k(X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/k}, \mathcal{O}_X) = \mathrm{H}^0(X, \omega_{X/k}^\vee) = 0.$$

- *Propria*: se R è un DVR con punto generico η e $X \to \operatorname{Spec} R$ e $Y \to \operatorname{Spec} R$ sono curve lisce di genere g, allora ogni isomorfismo $X_\eta \simeq Y_\eta$ si estende a un isomorfismo $X \simeq Y$.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} k(\eta) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Isom}_R(X, Y) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{M}_g \arrow[d, "\Delta"] \\
\operatorname{Spec} R \arrow[r, equal] \arrow[ur, dotted] & \operatorname{Spec} R \arrow[r, "{(X,Y)}"] & \mathcal{M}_g \times \mathcal{M}_g
\end{tikzcd}$$

D'ora in poi siamo sopra $\mathbb{Z}[1/2]$ e $g \geq 2$.

Se $k = \bar{k}$ è un campo, una **curva iperellittica** su k è una curva liscia connessa X con un morfismo $X \to \mathbb{P}^1_k$ di grado 2. L'automorfismo non banale di un tale rivestimento è detto un'**involuzione iperellittica** di X.

Se X è una curva iperellittica, allora X è la normalizzazione di $\mathbb{P}^1_k$ nel campo delle funzioni razionali di

$$\operatorname{Spec} k[x, y]/(y^2 - f(x)),$$

dove $f \in k[x]$ è un polinomio di grado $2g + 2$ con radici distinte e x è una coordinata affine di $\mathbb{P}^1_k$.

L'involuzione iperellittica è unica e il rivestimento doppio $X \to \mathbb{P}^1_k$ è unico a meno di automorfismi di $\mathbb{P}^1_k$.

$\mathcal{H}_g$ è lo pseudo-funtore definito come segue: per ogni schema S, $\mathcal{H}_g(S)$ è il gruppoide i cui oggetti sono i triangoli

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr] & & P \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

dove:

- $X \to S$ è una famiglia di curve lisce di genere g;
- $P \to S$ è una famiglia di curve lisce di genere 0;
- $X \to P$ è finito, fedelmente piatto di grado 2.

Teorema (Arsie-Vistoli, 2004)

$\mathcal{H}_g$ è uno stack algebrico irriducibile, liscio, di dimensione $2g - 1$.

Teorema

Il morfismo $\mathcal{H}_g \to \mathcal{M}_g$ definito da $(X \to P \to S) \mapsto (X \to S)$ è un'immersione chiusa.

Lo stack d'inerzia $\mathcal{I}_{\mathcal{M}_g}$ di $\mathcal{M}_g$ è il prodotto fibrato:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{I}_{\mathcal{M}_g} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{M}_g \arrow[d, "\Delta"] \\
\mathcal{M}_g \arrow[r, "\Delta"] & \mathcal{M}_g \times \mathcal{M}_g
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{I}_{\mathcal{M}_g}$ è lo pseudo-funtore che ha per oggetti le coppie

$$(X \to S, \sigma),$$

dove $(X \to S) \in \mathcal{M}_g(S)$ è una curva liscia di genere g e σ è un'automorfismo di X sopra S.

Lemma

Il morfismo $\mathcal{I}_{\mathcal{M}_g} \to \mathcal{M}_g$ è rappresentabile, non ramificato e finito.

Un'altra descrizione di $\mathcal{H}_g$: è lo pseudo-funtore che ha per oggetti le coppie

$$(X \to S, \sigma),$$

dove $(X \to S) \in \mathcal{M}_g(S)$ e σ è un S-automorfismo di X tale che $\sigma^2 = \mathrm{id}_X$ e il quoziente $X/\sigma \to S$ è una curva liscia di genere 0.

Lemma

Il morfismo $\mathcal{H}_g \to \mathcal{I}_{\mathcal{M}_g}$ è rappresentabile, non ramificato e proprio.

È rappresentabile e non ramificato perché $\mathcal{H}_g \subseteq \mathcal{I}_{\mathcal{M}_g}$.
Sia R DVR con punto generico η,

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} k(\eta) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H}_g \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} R \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & \mathcal{I}_{\mathcal{M}_g} \end{tikzcd}$$

Teorema

Il morfismo $\mathcal{H}_g \to \mathcal{M}_g$ definito da $(X \to P \to S) \mapsto (X \to S)$ è un'immersione chiusa.

- *Rappresentabile, non ramificato e proprio*: perché composizione di

$$\mathcal{H}_g \longrightarrow \mathcal{I}_{\mathcal{M}_g} \longrightarrow \mathcal{M}_g.$$

- *Iniettivo sui punti geometrici*: segue dall'unicità dell'involuzione iperellittica per le curve iperellittiche su un campo algebricamente chiuso. $\square$

Keel-Mori (1995) $\Rightarrow$ esiste schema M_g con un morfismo $\mathcal{M}_g \to M_g$ tale che:

- iniziale tra i morfismi da $\mathcal{M}_g$ negli schemi;
- proprio;
- per ogni campo algebricamente chiuso Ω,

$$\mathcal{M}_g(\operatorname{Spec}\Omega)/\text{isom.} \xrightarrow{\sim} M_g(\operatorname{Spec}\Omega).$$

Si dice **spazio dei moduli** ("coarse") di $\mathcal{M}_g$.

Teorema (Mumford, 1961)

Su un campo algebricamente chiuso M_g è una varietà quasi-proiettiva normale di dimensione $3g - 3$.

Keel-Mori $\Rightarrow$ esiste H_g spazio dei moduli per lo stack $\mathcal{H}_g$.

Si ha un diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}_g \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{M}_g \arrow[d] \\ H_g \arrow[r] & M_g \end{tikzcd}$$

Il morfismo $H_g \to M_g$ è un'immersione chiusa? Sì, in caratteristica zero.

Teorema

$H_{g,\mathbb{Q}} \to M_{g,\mathbb{Q}}$ è un'immersione chiusa.

Esiste un ricoprimento étale $\{M_j \to M_g\}_{j \in J}$ tale che...

$$
\begin{tikzcd}
{[\mathrm{Spec}(A_j/I_j)/G_j]} \arrow[rrr] \arrow[dr] \arrow[ddd] & & & {[\mathrm{Spec}\, A_j/G_j]} \arrow[dl] \arrow[ddd] \\
& \mathcal{H}_g \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{M}_g \arrow[d] & \\
& H_g \arrow[r] & M_g & \\
\mathrm{Spec}(A_j/I_j)^{G_j} \arrow[rrr] \arrow[ur] & & & M_j = \mathrm{Spec}\, A_j^{G_j} \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

Se G è un gruppo finito che agisce su un anello A e $I \subseteq A$ è un'ideale invariante allora $A^G \to (A/I)^G$ è surgettivo. $\square$