

Successioni e i loro limiti.

2.

Def. Una successione in $\mathbb{R}$ è una funzione
 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

Convenzioni. Se $f(n) = a_n \in \mathbb{R}$, conveniamo di scrivere la successione in una delle seguenti maniere:

$$n \mapsto a_n; \{a_n\}_{n=0}^{\infty}; \{a_n\}; a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$$

P.es. la successione $f(n) = \frac{1}{n+1}$, $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, può essere scritta:

$$n \mapsto \frac{1}{n+1}; 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n+1}, \dots; \left\{ \frac{1}{n+1} \right\}_{n=0}^{\infty}$$

o semplicemente $\left\{ \frac{1}{n+1} \right\}$, o $a_n = \frac{1}{n+1}$.

Note. Spesso trattiamo di successioni definite su $\mathbb{N} - \{0, 1, \dots, k\}$, per qualche $k \geq 0$.

P.es. $\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$; $\left\{ \frac{1}{n(n-2)} \right\}_{n=3}^{\infty}$; eccetera.

Def. Sia $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una successione in $\mathbb{R}$.

• $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ è superiormente limitata se

$$\exists R \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq R$$

• $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ è inferiormente limitata se

$$\exists L \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}: a_n \geq L$$

• $\{a_n\}$ è limitata se è superiormente e inferiormente limitata.

Notazioni. Se $\{a_n\}$ è una successione in $\mathbb{R}$, superiormente limitata, poniamo

$$\sup \{a_n\} := \sup \{a_n: n \in \mathbb{N}\}.$$

Analogamente definiamo $\inf \{a_n\}$.

202

Def. Diciamo che una proprietà P vale definitivamente per una successione $\{a_n\}$ in $\mathbb{R}$ se $\exists N \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}: n \geq N \Rightarrow a_n$ ha la proprietà P

Esempio. Una successione $\{a_n\}$ è definitivamente positiva se

$$\exists N \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}: n \geq N \Rightarrow a_n > 0.$$

P.es. $a_n = n - 5$ è definitivamente positiva:

$$n > 5 \Rightarrow a_n > 0$$

P.es. $a_n = \frac{1}{n} \in (0, \frac{1}{10})$ definitivamente:

$$0 < a_n \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{10} \Leftrightarrow n > 10.$$

Esercizio. Mostare che $\forall \varepsilon > 0: \frac{1}{n} < \varepsilon$ definitivamente.

Def. Sia $\{a_n\}$ una successione in $\mathbb{R}$.

Diciamo che $\{a_n\}$ è convergente sse

$$\exists l \in \mathbb{R}: \forall \varepsilon > 0 \quad |a_n - l| < \varepsilon \text{ definitivamente.}$$

Cioè, se $\exists l \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}: n \geq N \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$.

Note. N in genere dipende da ε .

Diciamo che l è il limite di a_n per n che tende a ∞ :

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\text{oppure } a_n \rightarrow l; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l.$$

Esempi ① $\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ è convergente e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Dovrò verificare che $\forall \varepsilon > 0 \quad \frac{1}{n} = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$ definitivamente.

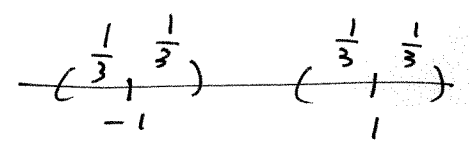
In fatti, $\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$:

$\forall n \in \mathbb{N}; n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$.

② $n \mapsto (-1)^n = 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$
non è convergente.

Sia $\varepsilon = \frac{1}{3}$. Se esistesse

$l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, allora



$|a_n - l| < \frac{1}{3}$ definitivamente.

Poiché esistono n arbitrariamente grandi per cui $a_n = 1$, dovrai avere $|1 - l| < \frac{1}{3}$.

Allo stesso modo dovrai avere $|-1 - l| < \frac{1}{3}$,

quindi $2 = |1 - (-1)| = |(1 - l) - (-1 - l)| \leq$
 $\leq |1 - l| + |-1 - l| < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}; \quad 2 < \frac{2}{3},$
assurdo.

Teorema (unicità del limite).

Sia $\{a_n\}$ una successione in $\mathbb{R}$.

Se $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l_1$ e $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l_2$,
allora $l_1 = l_2$.

Dim. Supponiamo per assurdo che $l_1 \neq l_2$.

Sia $\varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{3}$. Per ipotesi,

$|a_n - l_1| < \varepsilon$ definitivamente (per $n \geq N_1$, diciamo)
e $|a_n - l_2| < \varepsilon$ definitivamente (per $n \geq N_2$);

quindi, per $n \geq \max(N_1, N_2)$ si ha 204

$$|l_2 - l_1| = |(l_2 - a_n) - (l_1 - a_n)| \\ \leq |l_2 - a_n| + |l_1 - a_n| \leq 2\varepsilon = \frac{2}{3} |l_2 - l_1|,$$

cioè (poiché $|l_1 - l_2| \neq 0$): $1 < \frac{2}{3}$, assurdo.

Def. Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ successioni in $\mathbb{R}$.

La loro somma è la successione $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$, definita da
$$n \mapsto a_n + b_n$$

Analogamente si definiscono $\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n \cdot b_n\}$, $\{c \cdot a_n\}$ (con $c \in \mathbb{R}$ fissato); $\{a_n^{b_n}\}$ (se $a_n > 0$ definitivamente); $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ (se $b_n \neq 0$ definitivamente), eccetera.

Proprietà dei limiti di successioni.

Siano $\{a_n\}, \{b_n\}$ successioni in $\mathbb{R}$

e siano $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R}$; $m = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Allora:

- (1) $a_n + b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l + m$ (cioè: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$),
- (2) $a_n \cdot b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l \cdot m$
- (3) $c \cdot a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c \cdot l$
- (4) $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{l}{m}$ (se $m \neq 0$)
- (5) $a_n^{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l^m$ (se $l > 0$)
- (6) $|a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |l|$

Teoremi del confronto.

201

(1) Siano $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$; $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = m$ e

si abbia $a_n \geq b_n$ definitivamente.

Allora $l \geq m$

(2) Siano $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l > m$.

Allora, $a_n > m$ definitivamente.

(3) Se $a_n \leq c_n \leq b_n$ definitivamente

e $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l$, allora

$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = l$

oss. Se $a_n \rightarrow 0$, allora $|a_n| \rightarrow 0$; e viceversa.

Def. Sia $\{a_n\}$ una successione in $\mathbb{R}$. $\{a_n\}$ è crescente se $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq a_{n+1}$.

Analogamente, $\{a_n\}$ è decrescente se $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \geq a_{n+1}$.

Teorema. Sia $\{a_n\}$ una successione in $\mathbb{R}$, crescente e superiormente limitata.

Allora $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{a_n\} \in \mathbb{R}$.

[Teorema delle successioni monotone].

Il simbolo ∞ e i suoi usi.

2.1

• Intervalli.

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\} \quad (\text{se } a \in \mathbb{R})$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \quad (\text{se } a \in \mathbb{R})$$

$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} \quad (\text{se } a \in \mathbb{R})$$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \quad (\text{se } a \in \mathbb{R})$$

• Estremi superiori / inferiori.

⊗ Se $A \subseteq \mathbb{R}$ superiormente illimitato
(cioè, $\forall M \in \mathbb{R} \exists x \in A : x > M$).

Allora poniamo $\sup A = +\infty$.

⊗ Se $A \subseteq \mathbb{R}$ inferiormente illimitato
(cioè, $\forall L \in \mathbb{R} \exists x \in A : x < L$).

Allora, $\inf A = -\infty$.

• Limiti.

⊗ Se $\{a_n\}$ una successione in $\mathbb{R}$.

Diciamo che $\{a_n\}$ diverge a $+\infty$

e scriviamo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

se $\forall R \in \mathbb{R} : a_n \geq R$ definitivamente

(cioè se $\forall R \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \ n \geq N \Rightarrow a_n \geq R$).

⊗ $\{a_n\}$ diverge a $-\infty$ se

$\forall P \in \mathbb{R} : a_n \leq P$ definitivamente.

Teorema. Sieno $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ successioni in $\mathbb{R}$. 20:

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$,
allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty.$$

Notazione. In forma stenografica, scriviamo questo Teorema come

$$\boxed{a + \infty = +\infty} \quad (\text{se } a \in \mathbb{R})$$

Valgono anche i Teoremi la cui forma stenografica recita:

$$+\infty + \infty = +\infty$$

$$-\infty - \infty = -\infty$$

$$-\infty + a = -\infty \quad (\text{se } a \in \mathbb{R})$$

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$(-\infty) \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$$

$$\frac{a}{\infty} = 0 \quad (\text{se } a \in \mathbb{R}).$$

Inoltre: $A^{+\infty} = +\infty$ se $A > 1$

$$a^{+\infty} = 0 \quad \text{se } 0 < a < 1$$

Esercizio. Tre termini $\frac{a}{\infty} = 0$ in Teorema.

Svolgimento.

Teorema. Se $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$

e $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ (o $-\infty$), allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Più complicato è il caso $\frac{\infty}{0}$.

200

Diciamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0^+$ se

(i) $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ e (ii) $a_n > 0$ definitivamente.

Allora, $\boxed{\frac{1}{0^+} = +\infty}$

Visi, se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0^+$, allora

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (1/a_n) = +\infty.$$

Forme di indeterminazione.

Non abbiamo definito le espressioni:

$$\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; 0 \cdot \infty; +\infty - \infty; 0^0; 1^\infty;$$

che si dicono forme di indeterminazione.

La ragione è che non esiste un Teorema che attribuisca loro un significato univoco.

P.es. $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ ① Sieno $a_n = n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$
e $b_n = n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Allora, $\frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Dovremmo porre $\frac{+\infty}{+\infty} = 0$?

② Sieno $a_n = n^2$ e $b_n = n$: $\frac{a_n}{b_n} = n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$;
Dovremmo porre $\frac{+\infty}{+\infty} = +\infty$

(3) Siano $a_n = n \rightarrow +\infty$ e $b_n = n+1 \rightarrow +\infty$ 209

Abbiamo pure $\frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} =$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1?$$

Nessuna scelta ci permette di estendere
il caso $l = +\infty$ e $m = +\infty$ ~~che~~ la
proposizione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$