Esercizi sulle funzioni continue.

[A] Sia $f \in C([-2,2];\mathbb{R})$ una funzione continua da $[-2,2]$ a $\mathbb{R}$, e supponiamo che $f(-2)=1$ e $f(2)=0$.

Dire quali delle seguenti affermazioni seguono necessariamente dalle ipotesi (e giustificarlo) e quali invece non seguono dalle ipotesi (e dare un controesempio).

(1) $\exists x \in (-2,2): f(x) = 1/2$

(2) $\exists x \in (-2,2): f(x) = x$

(3) $\exists x \in (-2,2): f(x) = 4-x$

(4) non $\exists x \in (-2,2): f(x) = 4-x$

(5) f è decrescente su $[-2,2]$

(6) f non è decrescente su $[-2,2]$

(7) f non è crescente su $[-2,2]$

(8) f è crescente su $[-2,2]$

(9) f ha un punto di massimo in $[-2,2]$

(10) f ha un punto di massimo in $(-2,2]$

(11) f ha un punto di massimo in $[-2,2)$

(12) $\max\{f(x): x \in [-2,2]\} = 2$

(13) $\max\{f(x): x \in [-2,2]\} = -2$

(14) $\forall x \in [-2,2]: f(x) \geq 0$

(15) $\forall x \in [0,2]: f(x) \geq 0$

(16) Se $x=-2$ è un punto di massimo per f in $[-2,2]$, allora
$$\forall x \in [-2,2]: \quad f(x) \leq 1$$
(17) Se $x=-2$ è un punto di massimo per f in $[-2,2]$, allora
$$\forall x \in (-2,2]: f(x) < 1$$
(18) Se $x=-2$ è l'unico punto di massimo per f in $[-2,2]$, allora
$$\forall x \in (-2,2]: f(x) < 1$$
(19) Se $x=-2$ è un punto di massimo per f in $[-2,2]$ e $c \in (-2,2]$ è un altro punto di massimo per f in $[-2,2]$, allora $f(c)=1$.

(20) Se $x=2$ non è un punto di minimo per f in $[-2,2]$, allora esiste $x \in (-2,2)$ tale che $f(x)=0$.

(21) Se $x=-2$ è l'unico punto di massimo di f in $[-2,2]$, allora
$$\sup\{f(x) : x \in (-2,2]\} < 1$$
(22) $x=-2$ non è un punto di massimo per f in $[-2,2]$

(23) $x=-2$ è un punto di massimo per f in $[-2,2]$

(24) $x=-2$ non è un punto di minimo per f in $[-2,2]$.

(25) Se $x = 0$ è l'unico punto di massimo per f in $[-2, 2]$, allora $f(0) > 1$.

(26) Se $x = -2$ è l'unico punto di massimo per f in $[-2, 2]$, allora

$$\sup\{ f(x) : x \in [-2, 2]\} = 1 .$$

(27) Se $x = -2$ è l'unico punto di massimo per f in $[-2, 2]$, allora f non ha massimo in $(-2, 2]$. Cioè, l'insieme $\{ f(x) : x \in (-2, 2]\}$ non ha massimo.

(28) Se $x = -2$ è l'unico punto di massimo per f in $[-2, 2]$, allora

$$\sup\{ f(x) : x \in [0, 2]\} < 1$$

(29) Se f ha un solo punto di massimo c in $[-2, 2]$, allora $c = -2$.

(30) Se f ha un solo punto di massimo in $[-2, 2]$, allora f ha un solo punto di minimo in $[-2, 2]$

(31) Se f ha un solo punto di massimo in $[-2, 2]$, allora $x = 2$ è un punto di minimo per f in $[-2, 2]$.

(32) Se f ha due punti di massimo in $[-2, 2]$, allora f ha due punti di minimo in $[-2, 2]$.

(33) Se f ha almeno ~~tre~~ (3) punti di massimo in $[-2, 2]$, allora f ha almeno due punti di minimo in $[-2, 2]$.

(34) Se $x_1 < x_2$ sono due punti di massimo per f in $[-2, 2]$, allora

$$f(x_1) = f(x_2).$$

(35) Se $x_1 < x_2$ sono due punti di ~~minimo~~ massimo per f in $[-2, 2]$, allora esiste x: $x_1 < x < x_2$ e x è un punto di minimo per f in $[-2, 2]$.

(36) Se $x_1 < x_2$ sono due punti di massimo per f in $[-2, 2]$, allora esiste x : $x_1 < x < x_2$ e x è un punto di minimo per f in $[x_1, x_2]$.

Risposte: (1) V; (2) V; (3) F; (4) F; (5) F; (6) F; (7) V; (8) F; (9) V; (10) F; (11) V; (12) F; (13) F; (14) F; (15) F; (16) V; (17) F; (18) V; (19) V; (20) V; (21) F; (22) F; (23) F; (24) V; (25) V; (26) V; (27) V; (28) V; (29) F; (30) F; (31) F; (32) F; (33) F; (34) V; (35) F; (36) V