

ALMA MATER STUDIORUM – UNIVERSITA' DI BOLOGNA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
PROGETTO LAUREE SCIENTIFICHE
A.A. 2015-2016
GRAFI ED APPLICAZIONI

18/03/2016

DOCENTE: Prof.ssa Laura Faggioli
TUTOR: Dott.ssa Loredana Melcarne

II LEZIONE (Teoria) : Grafi piani e caratteristica di Eulero

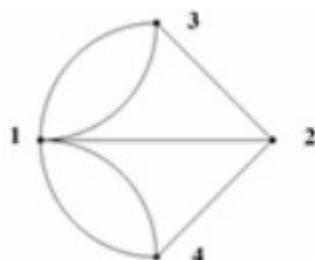
La caratteristica di Eulero

Si definisce **grafo planare** un grafo che può essere raffigurato in un piano in modo che non si abbiano archi che si intersecano.

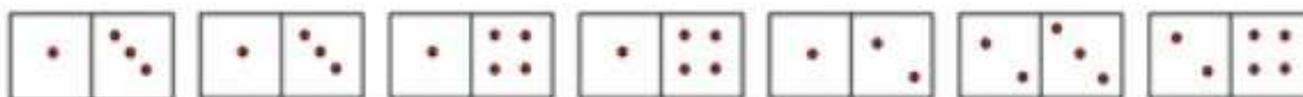
Il problema dei ponti di Königsberg, che vi è stato proposto nell'eserciziario, fu analizzato dallo stesso Eulero, che lo risolse rappresentando con dei punti (nodi) le quattro zone della città su cui arrivavano i sette ponti e ciascun ponte con un arco che congiunge due nodi.

Ebbene, egli dimostrò che il cammino richiesto non si può effettuare qualora un grafo abbia più di due nodi di grado dispari (impedimento di Eulero), come nel caso di Königsberg.

L'utilizzo del gioco del domino potrebbe rendervi più semplice capire perché tale cammino non esiste:



Osservando il grafo ci si rende conto che gli archi si possono rappresentare con le seguenti tessere del gioco del domino; ad esempio, la prima tessera rappresenta uno dei due archi che congiungono il nodo 1 con il nodo 3.



Ricordiamo che l'allineamento delle tessere, rispettando la regola del domino, richiede che due di esse possano essere consecutive solo quando un numero dell'una è accostato allo stesso numero dell'altra. Perciò, un numero presente soltanto all'interno dell'allineamento ha sempre delle presenze che sono in numero pari (una delle tessere che allineiamo può essere capovolta rispetto alla presentazione precedente come, ad esempio, la prima tessera qui sotto).

Nell'allineamento il numero 1 ha 4 presenze, mentre il 2 ha due presenze. Invece 3 e 4, che hanno ciascuno



una presenza anche in un estremo dell'allineamento, hanno un numero dispari di presenze.

Ogni cammino lungo gli archi del grafo corrisponde ad un allineamento delle tessere del domino.

Ad esempio, l'allineamento presentato precedentemente esprime il cammino dall'arco che va dal nodo 3 al nodo 1, seguito da quello che va dal nodo 1 al nodo 4, che a sua volta è seguito dall'arco che va dal nodo 4 al nodo 1, e così via.

Ora supponiamo, per assurdo, che il cammino di Königsberg si possa fare.

Allora, nell'allineamento almeno due numeri sono presenti soltanto all'interno dell'allineamento.

Supponiamo che questo numero sia a , che nell'allineamento ha un numero pari di presenze. Nello stesso tempo a è presente tante volte quante sono le tessere, cioè, tante volte quanti sono gli archi che toccano a .

Ma gli archi sono in numero dispari, dato che ogni nodo del grafo ha grado dispari. Il che è assurdo.

Pertanto il cammino non si può fare.

Inoltre, possibilità di tracciare grafi con un solo tratto di penna è soggetta alle seguenti regole:

1. Le figure che **non hanno nodi dispari** si possono tracciare con un tratto continuo partendo da un nodo qualunque.
2. Una figura che ha **esattamente due nodi dispari** può essere tracciata con un tratto continuo partendo da uno di essi.
3. Le figure che **hanno più di due nodi dispari** non possono essere tracciate con un tratto continuo.

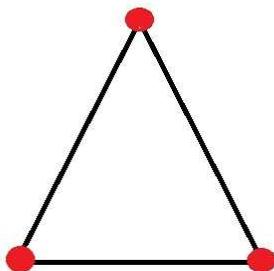
Durante i suoi studi, Eulero, scoprì **qualcosa di particolare ed importante riguardo al calcolo di**

$$N - A + R$$

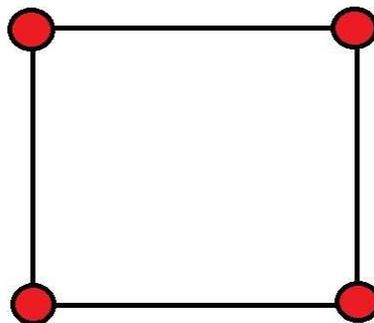
dove con N indichiamo i nodi, con A gli archi e con R le regioni, ossia ogni parte di piano delimitata da una curva chiusa.

Questa quantità si chiama **caratteristica di Eulero**.

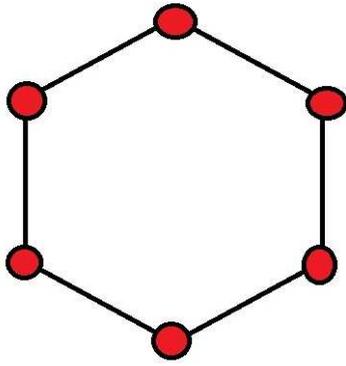
Ora, considerando grafi diversi, per ognuno di essi contiamo nodi, archi e regioni (considerando appartenente ad essi anche la regione esterna) e verifichiamo a quanto corrisponde questo valore, se è unico e se vale per qualsiasi tipo di grafo.



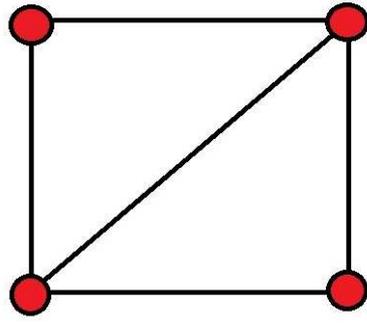
$$N - A + R = 3 - 3 + 2 = 2$$



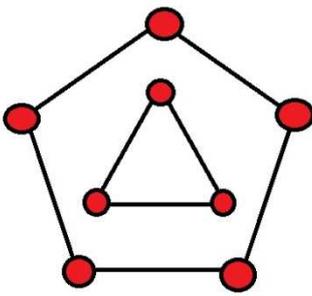
$$N - A + R = 4 - 4 + 2 = 2$$



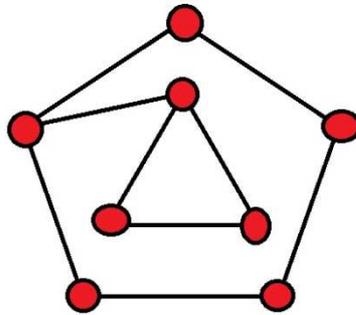
$$N - A + R = 6 - 6 + 2 = 2$$



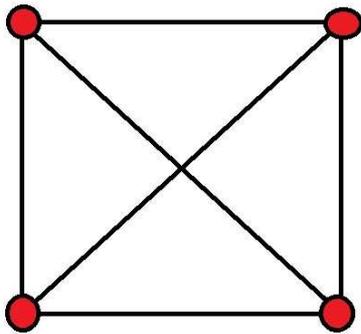
$$N - A + R = 4 - 5 + 3 = 2$$



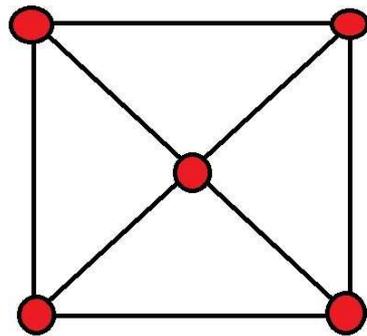
$$N - A + R = 8 - 8 + 3 = 3$$



$$N - A + R = 8 - 9 + 3 = 2$$



$$N - A + R = 4 - 6 + 5 = 3$$



$$N - A + R = 5 - 8 + 5 = 2$$

Notate che la caratteristica di Eulero è verificata solo per i grafi piani connessi.