

**ALMA MATER STUDIORUM – UNIVERSITA' DI BOLOGNA**  
**DIPARTIMENTO DI MATEMATICA**  
**PROGETTO LAUREE SCIENTIFICHE**  
**A.A. 2015-2016**  
**GRAFI ED APPLICAZIONI**

01/04/2016

**DOCENTE:** Prof.ssa Laura Faggioli  
**TUTOR:** Dott.ssa Loredana Melcarne

### **III LEZIONE (Teoria) : I poliedri e la caratteristica di Eulero**

Per rendere più semplice la comprensione degli studi di Eulero, nella lezione precedente abbiamo parlato di caratteristica di Eulero relativamente a grafi piani, ma, in realtà, i suoi studi furono eseguiti relativamente ad oggetti dello spazio, ossia a livello tridimensionale, per questo motivo non parleremo più di poligoni ma di poliedri.

Il termine **poliedro** deriva dalla radice greca poly (molti) ed hedra (sede); nonostante il termine hedra originariamente significasse sede, fu poi utilizzato a partire da Archimede per indicare le facce del poliedro, quindi possiamo affermare che poliedro significhi **“molte facce”**.

**I poliedri sono, dunque, oggetti tridimensionali costituiti da facce poligonali.**

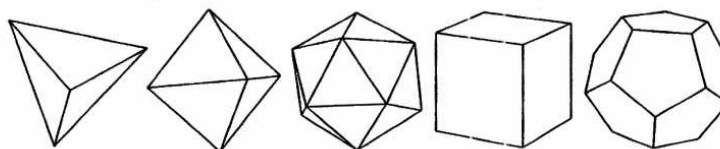
Grazie alla loro bellezza e simmetria, i poliedri hanno trovato un posto rilevante nell'arte, nell'architettura, nei gioielli, nei giochi e in molti altri campi. Molti oggetti microscopici naturali (molecole, protozoi, virus, etc.) hanno forme o simmetrie poliedrali; mentre i cristalli si possono presentare in questa forma anche a livello macroscopico.

Nel passato, per molti anni, diversi matematici hanno lavorato ad una definizione precisa di poliedro, presentando varie proposte, ma con scarsi risultati. In matematica, lavorare senza una definizione precisa può creare inesattezze e incoerenze; come ha scritto Henry Poincaré “Gli oggetti di cui si occupano i matematici sono stati a lungo definiti male, pensiamo di conoscerli perché li rappresentiamo con i sensi o l'immaginazione, ma di loro abbiamo solo un'immagine approssimativa e non un concetto preciso su cui fondare un ragionamento.”

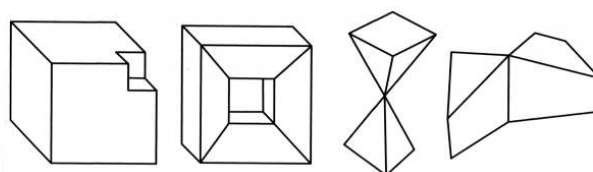
Una prima definizione intuitiva che possiamo dare è la seguente:

**“Un poliedro è una figura costituita da facce poligonali in cui ogni spigolo è condiviso da due facce mentre da ogni vertice si diramano almeno tre spigoli.”**

Gli oggetti nella prima fila della figura sono poliedri, ma lo sono anche quelli della seconda?



Poliedri Convessi



Poliedri Non Convessi

Il primo “oggetto”, ovvero il cubo con un angolo rimosso, secondo la definizione dei Greci ed Eulero, non veniva considerato un poliedro, in quanto un poliedro non doveva avere irregolarità. La seconda figura è una ciambella composta da facce piatte, la terza è formata da due poliedri uniti lungo uno spigolo.

Secondo la maggior parte delle definizioni, essi non sono dei poliedri, sebbene soddisfino i nostri criteri. Restringiamo, allora, la definizione ad una categoria più piccola di poliedri: i poliedri convessi.

**Un poliedro convesso è un oggetto che soddisfa la definizione data sopra ed ha la seguente proprietà: due punti qualsiasi appartenenti all’oggetto possono essere uniti da una linea retta che è completamente contenuta nel poliedro.**

Con questa definizione, vediamo che gli oggetti della seconda figura non soddisfano la definizione e non sono poliedri convessi. I Greci erano in accordo con questa definizione di poliedro, infatti consideravano le facce di un poliedro come delle sedie su cui il poliedro poteva appoggiarsi. Ogni poliedro della prima riga può appoggiarsi su ognuna delle sue facce, ma ogni poliedro della seconda ha almeno una faccia che non può fungere da “sedia” per il poliedro.

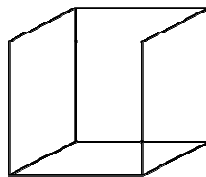
Per concludere vediamo come si definiscono le varie parti di un poliedro:

1. Facce (F) : sono facce poligonali.
2. Spigoli (A) : ogni coppia di facce adiacenti si incontra in un segmento chiamato spigolo.
3. Vertici (N) : spigoli adiacenti si incontrano nei vertici.

Eulero scrisse che in ogni solido chiuso da facce piane la somma dei numeri delle facce ed il numero di vertici eccede di due il numero degli spigoli,  $F + V = A + 2$ , ossia  $V - A + F = 2$ .

Vediamo un esempio in cui il calcolo è banale:

- Cubo:

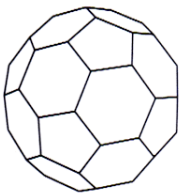


$$F = 6$$

$$A = 12 \rightarrow 8 - 12 + 6 = 2$$

$$N = 8$$

- Pallone da calcio:



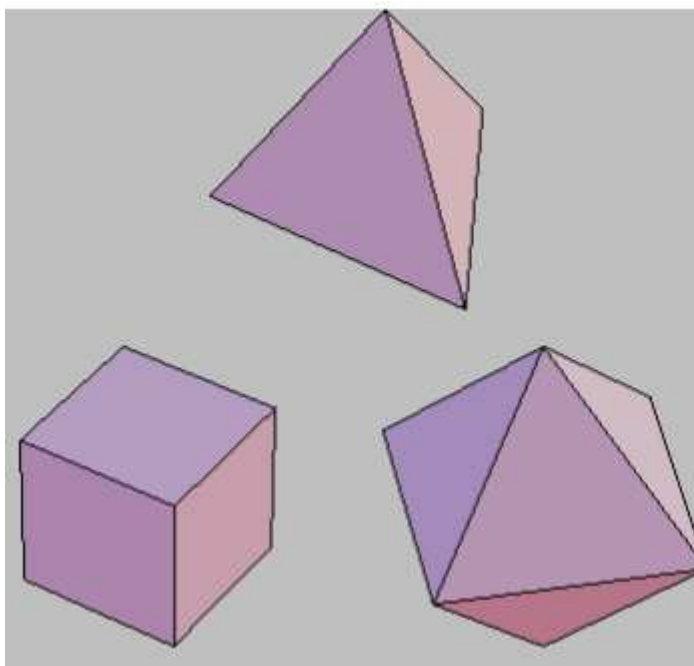
$$F = 32$$

$$A = 90 \rightarrow 60 - 90$$

$$N = 60$$

Inoltre, poliedri, parleremo di Alcuni esempi di

- Tetraedro
- Cubo
- Ottaedro



$$+ 32 = 2$$

relativamente a tali di regolarità. poliedri regolari sono:

E' semplice trovare la regolarità nei poligoni: ogni lato deve avere la stessa lunghezza mentre ogni angolo interno ha la stessa misura. Esistono infiniti poligoni regolari: abbiamo un poligono regolare con n-lati per ogni numero intero n maggiore di 2. Le proprietà che deve avere un **poliedro** per essere **regolare** sono le seguenti:

- **Il poliedro è convesso**
- **Ogni faccia è un poligono regolare**
- **Tutte le facce sono congruenti**
- **Ogni vertice è circondato dallo stesso numero di facce**