ALMA MATER STUDIORUM – UNIVERSITA' DI BOLOGNA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
PROGETTO LAUREE SCIENTIFICHE
A.A. 2015-2016
GRAFI ED APPLICAZIONI

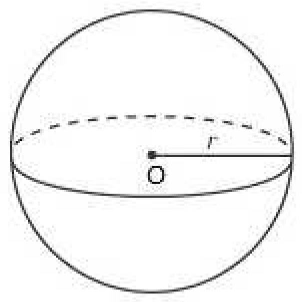
6/04/2016

DOCENTE: Prof.ssa Laura Faggioli
TUTOR: Dott.ssa Loredana Melcarne

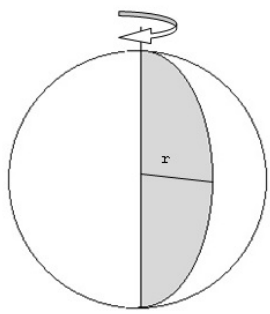
IV LEZIONE (Teoria) : Grafi su piano, sfera e toro

Nelle lezioni precedenti abbiamo studiato la caratteristica di Eulero e la sua validità per figure piane e per i poliedri. Oggi cambieremo un po' il suo contesto di applicazione, ma prima, abbiamo bisogno di fornire alcune definizioni:

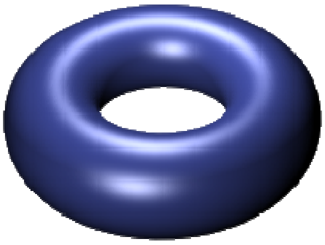
Sfera : solido geometrico costituito da tutti i punti che sono a distanza minore o uguale ad una distanza fissata r, detta *raggio della sfera*, da un punto O detto *centro della sfera.*



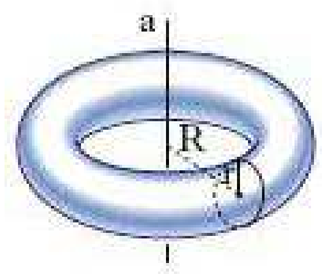
E' generato dalla rotazione completa di un semicerchio attorno al suo diametro. Il centro, il raggio ed il diametro del semicerchio diventano il centro, il raggio ed il diametro della sfera.



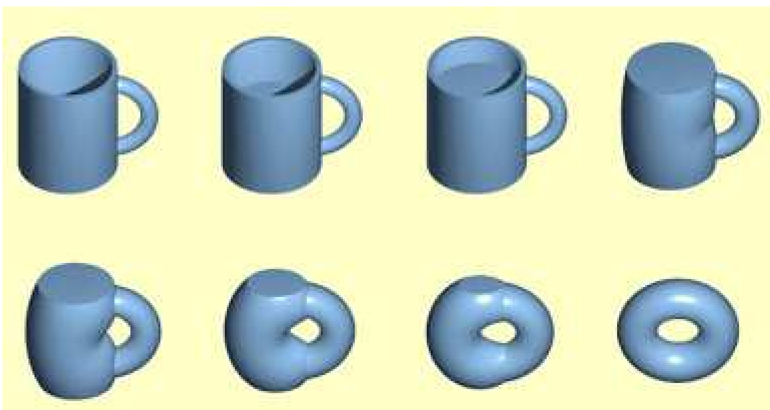
Toro: il toro è una superficie a forma di ciambella



Si ottiene facendo ruotare una circonferenza intorno ad un asse di rotazione appartenente allo stesso piano della circonferenza ma disgiunto da questa.



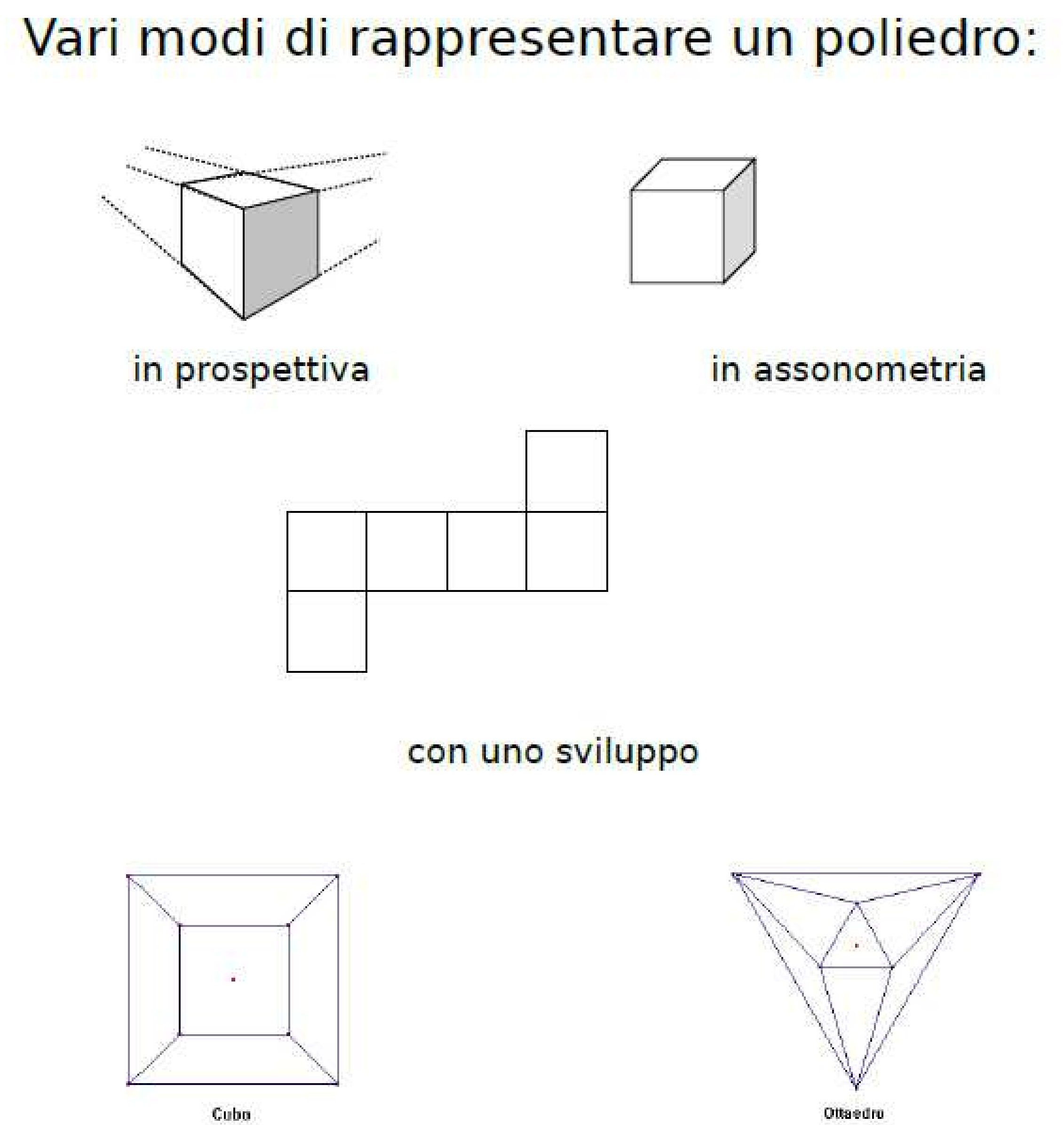
Fate attenzione: il buco non deve essere necessariamente centrale e tondo, l'importante, affinché una superficie sia un toro, è che ci sia un solo buco.
Ad esempio, una tazza con un manico, come quelle che utilizziamo tutti i giorni, è un toro anche se non ha la classica forma a ciambella.



La volta precedente abbiamo visto come esempio di poliedro un pallone da calcio e ne abbiamo calcolato facce, archi e vertici tenendo conto che esso è formato da 32 facce, di cui 12 sono pentagoni regolari e 20 sono esagoni regolari il cui lato è uguale a quello dei pentagoni. Non abbiamo notato che stavamo lavorando con una particolare pavimentazione della sfera fatta con "mattonelle" che hanno la forma di poligoni regolari. Questo ci fa intuire che potremmo "spalmare" questo insieme di mattonelle sul piano ottenendo lo stesso grafo e lo stesso risultato per la caratteristica di Eulero.

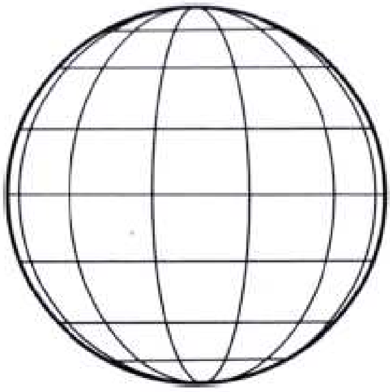
Possiamo dunque affermare che la formula di Eulero non è solo una proprietà dei poliedri, ma anche della sfera. Infatti, la formula mette in luce che se disegniamo sulla sfera un reticolato curvilineo, le cui regioni sono poligoni “deformati”, la somma $N - A + R$, riferita al reticolato, fa sempre 2.

Questa proprietà viene detta *topologica*. Ma cos’ è la topologia?
La **topologia** è una disciplina che ricerca le proprietà degli oggetti geometrici che non cambiano se vengono deformati. La formula di Eulero è, appunto, una di queste proprietà e quindi che fornisce un invariante topologico.
Per capire meglio questo concetto, immaginiamo che i poliedri visti a lezione siano fatti di gomma sottile, in questo modo possiamo spalmarli sul piano ed ottenere una trasformazione topologica.
La “deformazione senza strappi” di un foglio di gomma rende l'idea di una trasformazione continua reversibile.



I primi studiosi di topologia rimasero affascinati dalla formula di Eulero e si chiesero se fosse valida anche su superfici topologiche diverse dai poliedri.
In tal caso bisogna individuare i vertici, gli spigoli e le facce su di una superficie topologica. Certamente i topologi non si spaventarono di fronte alla questione e permisero a facce e a spigoli di essere curvi.

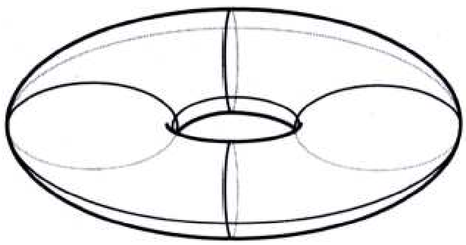
Facciamo un esempio concreto: prendiamo una sfera e vediamo cosa considerare come facce, spigoli e vertici. Per prima cosa dobbiamo creare una partizione, ad esempio disegnando 12 linee longitudinali che si incontrano ai due poli e 7 linee latitudinali parallele,



in questo modo riusciamo ad avere 72 facce curve rettangolari e 24 facce curve triangolari vicino ai poli, per un totale di 96 facce, 180 archi e 86 nodi. Sostituendolo nella formula di Eulero otteniamo:

$$96 - 180 + 86 = 2$$

Se cambiamo partizione alla sfera il risultato resta sempre 2.
A questo punto siamo tentati di ipotizzare che la formula di Eulero si applichi ad ogni superficie topologica, proviamo con un toro:



se partizioniamo un toro collocando 2 circonferenze attorno al buco centrale e 4 circonferenze attorno al suo tubo circolare, riusciamo ad ottenere 8 facce quadrilatere, 16 archi e 8 nodi. Sostituendo tali numeri nella formula di Eulero troviamo un risultato sorprendente:

$$8 - 16 + 8 = 0.$$

Se dovessimo costruire una partizione diversa, il risultato sarebbe ancora 0, invece che l'atteso 2.
Quindi possiamo pensare che ogni superficie topologica abbia la propria formula di Eulero, e infatti, questo numero speciale può essere utilizzato per distinguere le superfici.
Cioè diremo che se $N - A + R$ non è 0 allora la superficie topologica non è omeomorfa ad un toro, ossia non si può deformare in modo continuo così da ottenere un toro.
Per questo motivo abbiamo affermato che la caratteristica di Eulero è una quantità intrinseca della superficie, ovvero è un invariante della superficie,ecco perché il numero di Eulero è uno strumento importante per lo studio dei poliedri, per la topologia, la teoria dei grafi e più in generale per la geometria.