ALMA MATER STUDIORUM – UNIVERSITA' DI BOLOGNA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
PROGETTO LAUREE SCIENTIFICHE
A.A. 2015-2016
GRAFI ED APPLICAZIONI

08/04/2016

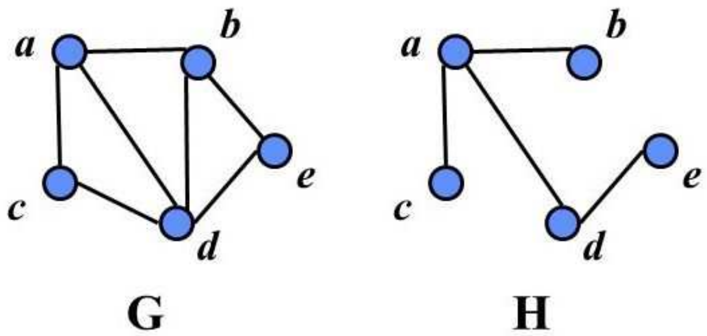
DOCENTE: Prof.ssa Laura Faggioli
TUTOR: Dott.ssa Loredana Melcarne

V LEZIONE (Teoria) : Alberi

Ricordiamo alcune definizioni fornite durante la prima lezione:

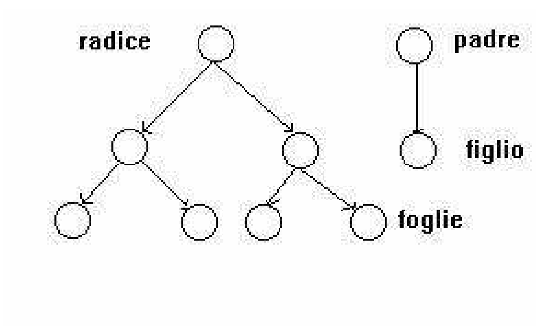
dato un grafo, si dice **cammino o catena** da un nodo A in un nodo B, un insieme di nodi, con inizio in A e termine in B, tale che per ogni coppia di nodi consecutivi dell'insieme esista un arco del grafo che li colleghi. Un grafo non orientato si dice **connesso** se esiste un cammino per ogni coppia di nodi del grafo.

Un **albero** è un grafo connesso senza cicli.



Un **ciclo** è un cammino fatto su lati adiacenti tutti distinti tra loro, che finisce dove è iniziato.

Un vertice di grado uno di un albero è detto **foglia**.



Ogni albero è un grafo piano ma, un grafo piano è un albero se e solo se in ogni sua realizzazione sul piano si ha che R=1.

Per questo motivo, nel caso degli alberi la caratteristica di Eulero N - A + R = 2 diventa:

$$N - A + 1 = 2 \Rightarrow N = A + 1$$

Il principio di induzione

La successione dei numeri naturali 1, 2, 3, 4, … non ha termine poiché, dopo qualunque intero *n* si può scrivere l'intero successivo *n*+1. Questa proprietà dell'insieme dei numeri naturali si esprime dicendo che vi sono infiniti numeri naturali.

L'**induzione** è il procedimento che consiste nel passare da affermazioni di carattere particolare ad affermazioni di carattere generale. Il procedimento inverso, dal generale al particolare, è invece chiamato **deduzione**.

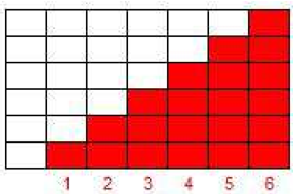
Un esempio di affermazione di carattere generale è "tutti i numeri che terminano con 5 sono divisibili per 5", mentre un'affermazione di carattere particolare è "145 termina con 5". Dalla prima affermazione possiamo allora dedurre che 145 è multiplo di 5. Questo ci sembra logicamente impeccabile e anche banale. Assai più fragile, dal punto di vista logico, è invece il procedimento dell'induzione. Dal fatto che 145 è multiplo di 5 posso concludere, per induzione, che tutti i numeri che terminano per 5 sono multipli di 5 (vero!), ma potrei anche concludere che tutti i numeri di tre cifre sono multipli di 5 (falso!) o che tutti i numeri che iniziano con 1 sono multipli di 5 (falso!). Non è sempre così ovvio quale sia la strada giusta per passare dal particolare al generale e, soprattutto, non c'è nessun motivo per cui una proprietà che vale in un caso o anche in diversi casi debba necessariamente valere per tutti i casi. Si tratta di saper cogliere la giusta generalizzazione.

Consideriamo questo problema:
quanto vale la somma dei primi n numeri naturali?
Si dice che per punizione al matematico Gauss fosse stato assegnato a scuola il compito di calcolare la somma dei primi 100 numeri naturali. Gauss trovò un modo semplice per fare il suo compito:
Pensò di scrivere i numeri da 1 a 100 uno di seguito all'altro su una retta, e nella riga sotto gli stessi numeri in ordine decrescente:

1	2	3	…	98	99	100
100	99	98	…	3	2	1

Notò così che la somma dei numeri su ogni colonna è sempre uguale all'ultimo numero, 100, più 1. Il numero delle colonne è invece pari ai numeri che si vogliono sommare, 100. Sommando quindi tutti i numeri della tabella otterremo 100 volte la quantità 101. In questo modo però, poiché ogni numero è stato scritto due volte, ottengo il doppio della quantità cercata. Quindi la somma dei primi 100 numeri naturali sarà:

$$S_{100} = \frac{100 * 101}{2} = 5050$$



Questo ragionamento si può ripetere per qualunque numero naturale *n* prevedendo così che la somma dei primi *n* numeri naturali sarà:

$$S_n = \frac{n * (n+1)}{2}$$

Ma siamo sicuri che sia giusto generalizzare questa formula partendo da uno o più casi particolari?

Esiste una differenza fondamentale tra il metodo di indagine della matematica e quello delle scienze empiriche. Il metodo induttivo dell'indagine scientifica, infatti, consiste nel procedere da una particolare serie di osservazioni di un certo fenomeno alla formulazione di una legge generale che governa il verificarsi di quel fenomeno. Il grado di certezza con cui la legge è in tal modo stabilita dipende dal numero delle singole osservazioni e delle conferme: ogni legge e teoria scientifica è quindi vera "fino a prova contraria", fino a quando, cioè, qualche osservazione o qualche esperimento non la contraddica. Questo modo di procedere non appartiene alla matematica: ogni congettura, seppur verificata in moltissimi casi, non rappresenta altro che un'ipotesi (magari molto attendibile) e diventa un teorema soltanto quando è stata dimostrata, cioè quando si può far vedere che essa è conseguenza logica necessaria delle ipotesi che si accettano come valide. Dunque alcune proprietà possiamo verificarle per molti numeri, magari per miliardi, ma questo non può garantirci la loro validità universale.

Ci proponiamo di trovare uno strumento matematico in grado di garantirci la validità di affermazioni ottenute per induzione.

Consideriamo la successione dei numeri naturali e immaginiamo che ogni numero generi il successivo. Ecco che allora abbiamo un capostipite, il numero 1, il quale genera il numero 2, che genera il 3, ecc.

Diremo che una proprietà dei numeri naturali è **ereditaria** se si trasmette di padre in figlio, cioè da un numero al successivo. Dire che una proprietà dei numeri naturali è ereditaria significa affermare che si trasmette da un numero al successivo e cioè che, se vale per un numero n, allora vale anche per $n + 1$.

Il cosiddetto principio di induzione matematica afferma che se una proprietà vale per il numero 1 ed è ereditaria, trasmettendosi di padre in figlio, allora vale per tutti i numeri.

Per dimostrare la validità di un'affermazione per induzione è necessario dunque verificare:

1. che la proposizione valga per il numero 1;

2. che se la proposizione vale per ogni numero k, allora vale anche per il successivo k + 1, (cioè che è ereditaria).

Bisogna cioè:

1. Verificare direttamente la proposizione per n = 1, detta base dell'induzione.

2. Supporre valida la proposizione per un ipotetico numero naturale che indichiamo con k (ipotesi induttiva) e provare mediante un ragionamento logico o passaggi di tipo algebrico validi per ogni possibile valore di k, che da essa consegue necessariamente la validità della proposizione per il numero successivo, cioè per k +1 (passo dell'induzione).

Questo modo di procedere ci fornisce uno schema di ragionamento che ci permette di dimostrare la validità di una certa proposizione per tutti i numeri. Riprendiamo ora il problema lasciato precedentemente in sospeso e andiamo a dimostrare, applicando la tecnica ora descritta, che effettivamente la congettura che avevamo fatto è corretta.

Proposizione

La somma dei primi n numeri naturali è data dalla formula

$$P(n): 0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

per ogni numero naturale n.

<u>Dimostrazione per induzione</u>

1. Verifichiamo la base dell'induzione:

$$\frac{1(1+1)}{2}$$

allora la proposizione P(1) è vera.

2. A partire dalla seguente ipotesi induttiva: supponiamo che sia vera la proposizione P(k) per un certo numero naturale k; cioè

$$0+1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

dobbiamo dimostrare che dall'ipotesi induttiva consegue necessariamente la validità di P(k +1) ,
cioè la formula che otteniamo dalla P(n) assumendo $n = k + 1$ (**passo dell'induzione**):

$$0+1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Considerando il primo membro dell'uguaglianza, applicando l'ipotesi induttiva abbiamo:

$$0+1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Mediante passaggi algebrici che sono validi per qualsiasi numero naturale k, abbiamo così svolto il passo dell'induzione. La nostra dimostrazione è così terminata. Quella che, verificata solo per alcuni casi, non era altro che una semplice congettura, ha acquistato adesso la validità universale di un teorema.