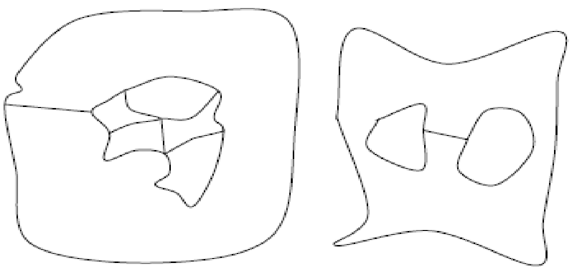
ALMA MATER STUDIORUM – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
PIANO LAUREE SCIENTIFICHE

DOCENTE: Rossella Rimondi
TUTOR: Sara Querzè

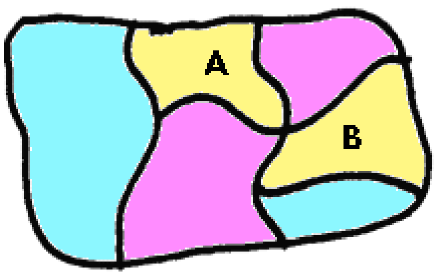
I GRAFI: lezione 3

Il problema della colorazione delle mappe

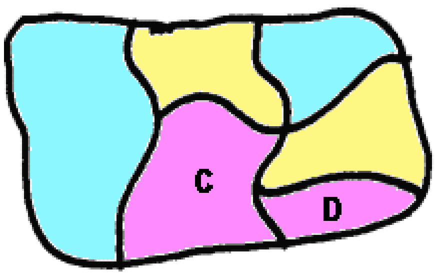
Immaginiamo di avere di fronte una mappa. Vogliamo colorarla in modo tale che regioni confinanti risultino sempre colorate con colori diversi.
Va precisato che consideriamo esclusivamente mappe le cui *regioni* siano *connesse*. Non solo: vogliamo anche che *non ci siano confini interni ad uno stato*, cioè escludiamo situazioni come quelle mostrate nella figura seguente.



Inoltre specifichiamo che cosa intendiamo per *regioni confinanti* (o adiacenti): due regioni si dicono confinanti se hanno un bordo in comune e non solo uno o più punti isolati.



Questa mappa è colorata correttamente perché le regioni A e B hanno in comune un solo punto.



In questa mappa invece c'è un errore di colorazione perché le regioni C e D confinano lungo una linea e quindi devono essere di colori diversi.

Osservazione Come abbiamo già detto nelle scorse lezioni, **il problema di colorare carte su una sfera è equivalente al problema di colorare carte nel piano in cui tutte le regioni tranne una sono limitate**. Ricordiamo il perché.
Consideriamo una cartina su una sfera cava la cui superficie sia fatta di gomma sottile, immaginiamo di fare un buco all'interno di una delle regioni e spalmiamo la superficie rimanente nel piano coprendolo tutto in modo che la regione dove abbiamo fatto il buco diventi una regione illimitata, un "mare" che circonda tutte le altre (questa operazione si può descrivere in modo più rigoroso usando la costruzione della *proiezione stereografica* della sfera sul piano, a partire dal punto levato). La costruzione si può ripetere in direzione inversa: partendo da una cartina nel piano con una sola regione illimitata, possiamo spalmarla sulla sfera e aggiungere un punto.

PROBLEMA Qual è il numero minino di colori necessari per colorare una mappa qualsiasi in modo tale che regioni adiacenti non abbiano lo stesso colore?

La risposta al problema è data dal **teorema dei quattro colori**:
data una superficie piana divisa in regioni connesse, sono sufficienti quattro colori per colorare ogni regione facendo in modo che regioni confinanti non abbiano lo stesso colore.

È immediato trovare mappe per cui tre soli colori non sono sufficienti. Non è eccessivamente difficile dimostrare che ne bastano al più cinque (tra poco vedremo la dimostrazione). Tuttavia dimostrare che ne siano sufficienti quattro è particolarmente complesso, tanto che la dimostrazione di questo teorema ha richiesto, per la prima volta nella storia della Matematica, un ricorso massiccio al computer.

Un po' di storia ...

La congettura dei quattro colori venne formulata per la prima volta nel **1852**, quando Francis Guthrie si accorse che per colorare la mappa delle contee britanniche erano sufficienti quattro colori.

Negli anni successivi molti matematici tentarono invano di dimostrare il teorema. In particolare nel 1879 Alfred Kempe presentò una dimostrazione, a lungo ritenuta quella definitiva; nel 1890 però Percy Heawood vi scoprì un errore fatale. Tuttavia, confutando la dimostrazione di Kempe, Heawood dimostrò che per qualsiasi mappa erano sufficienti cinque colori.

La dimostrazione definitiva fu pubblicata nel **1976** per opera di Kenneth Appel e Wolfgang Haken, due matematici dell'Università dell'Illinois.
La loro dimostrazione fa ricorso ad un pesante uso del computer: si basa infatti sulla riduzione del numero infinito di mappe possibili a 1936 configurazioni (poi ulteriormente ridotte a 1476), per le quali la validità del teorema è stata verificata caso per caso dal calcolatore.
Per ridurre al minimo la possibilità di errore, il programma fu eseguito su diverse macchine con due algoritmi indipendenti. Per completare l'analisi di tutti i casi possibili fu necessario far lavorare i

computer per migliaia di ore. Alla fine, servirono più di 500 pagine per trascrivere a mano tutte le verifiche che costituivano la dimostrazione.
Il fatto che la dimostrazione fosse basata sull'analisi di una moltitudine di casi discreti ottenuta grazie all'ausilio del computer (ricordiamo che era la prima volta che ciò accadeva) portò alcuni matematici a contestarne l'effettiva validità: sia per l'impraticabilità di una verifica manuale di tutti i casi possibili, sia per la difficoltà di avere la certezza che l'algoritmo fosse stato implementato correttamente. Ad ogni modo, nonostante le accuse di scarsa "eleganza", nell'algoritmo non è mai stato trovato alcun errore.

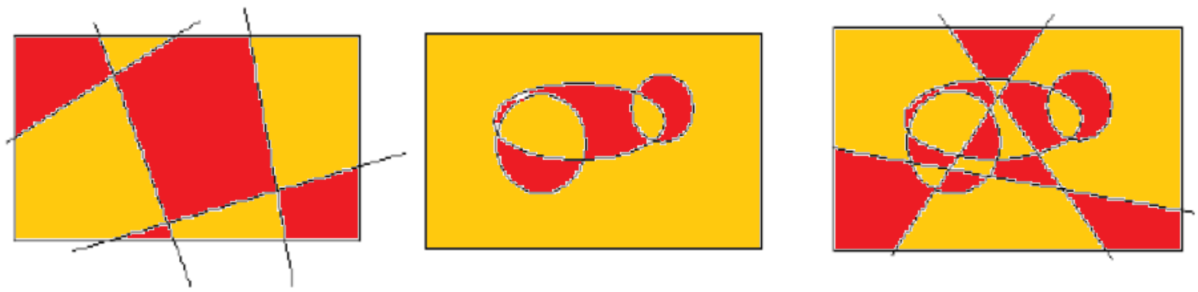
Verso il teorema dei quattro colori ...

Ora facciamo finta di non conoscere il teorema dei quattro colori e cerchiamo di risolvere il problema esaminando vari casi.

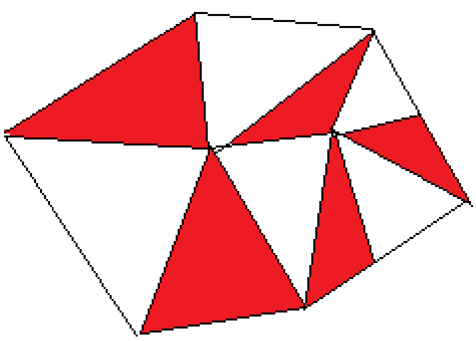
2 colori

Sono sufficienti due colori per colorare una qualsiasi mappa nel modo richiesto?
Due colori non sono sufficienti. Basti pensare a tre regioni, ognuna delle quali confina con le altre due (come per esempio Svizzera, Francia e Italia).

Due colori sono sufficienti per ogni mappa **tracciata con linee rette** che ne attraversino l'intera superficie e/o **con linee chiuse semplici** interamente interne alla mappa.

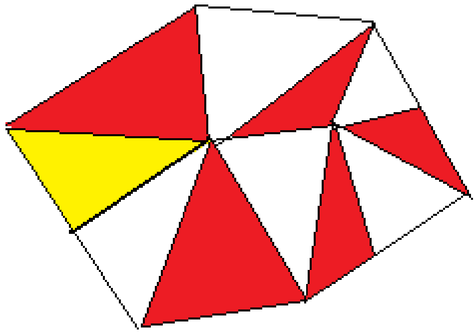


3 colori

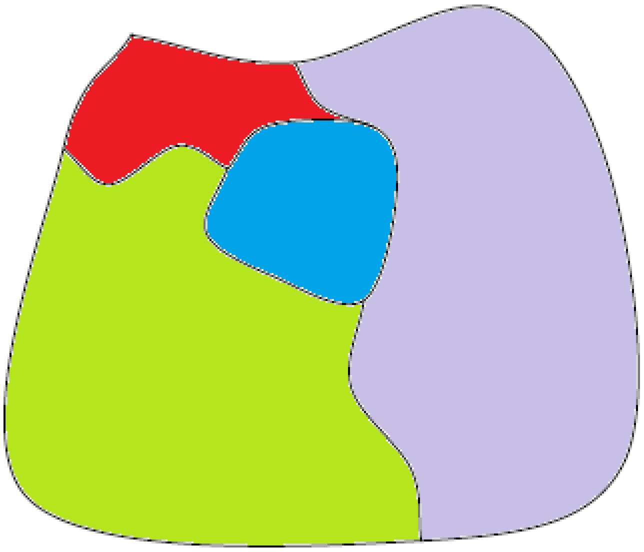


Le figure in cui il numero di linee che convergono in un vertice è sempre un numero pari si possono colorare solamente con due colori.

Se in un vertice le linee che si congiungono sono dispari allora si deve aggiungere un colore.



Ma allora tre colori sono sufficienti per colorare una mappa qualsiasi?
Non sono sufficienti nemmeno tre colori. Si pensi, per esempio, al Lussemburgo: esso è circondato da tre stati (Francia, Belgio e Germania), ciascuno dei quali confina con gli altri due. Per questa situazione, schematizzata nella figura qui sotto, occorrono quattro colori.

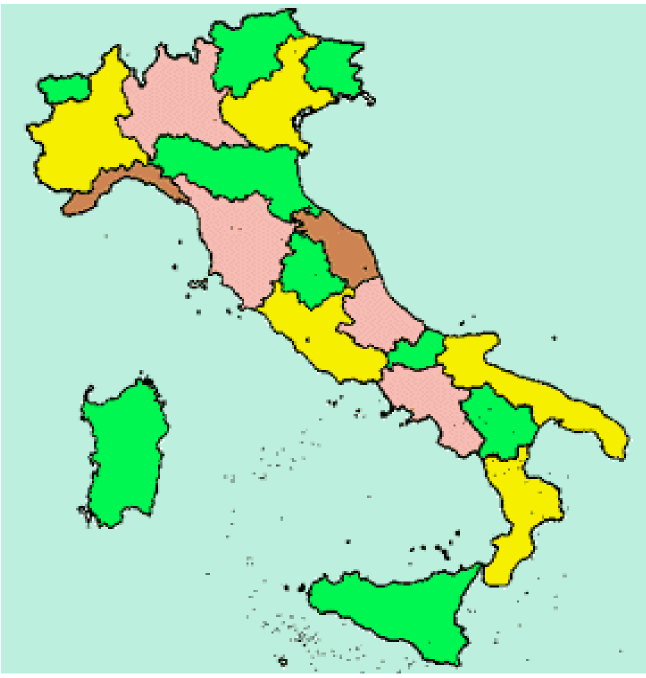


4 colori

Questa è la cartina dell'Italia.

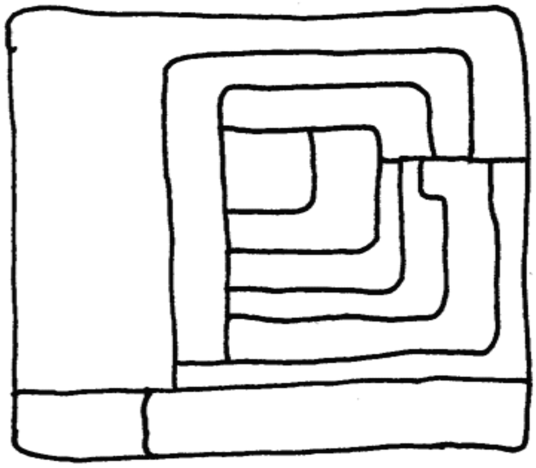
Quanti colori sono stati usati?

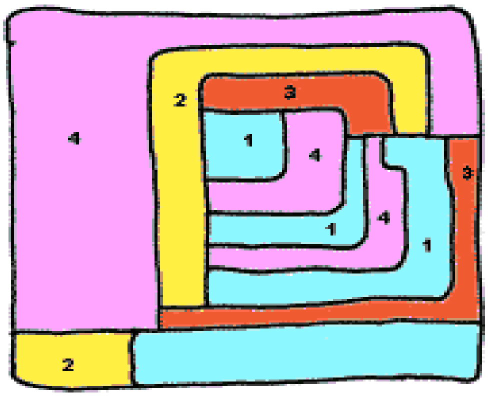
Se ne potevano usare di meno? E quanti come minimo?

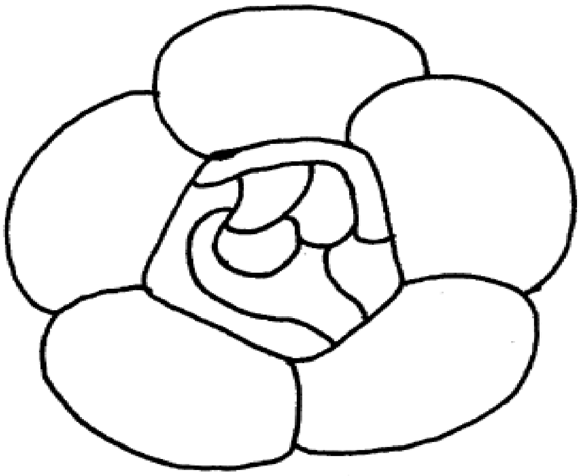


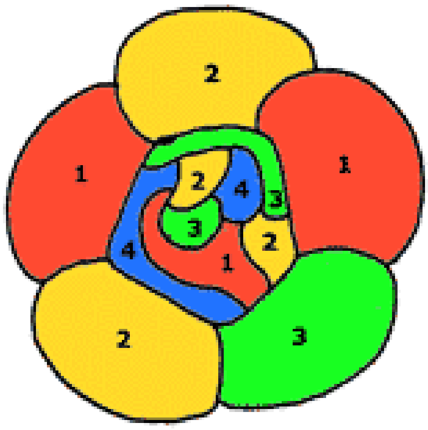
Abbiamo ricolorato la cartina usando solamente quattro colori.

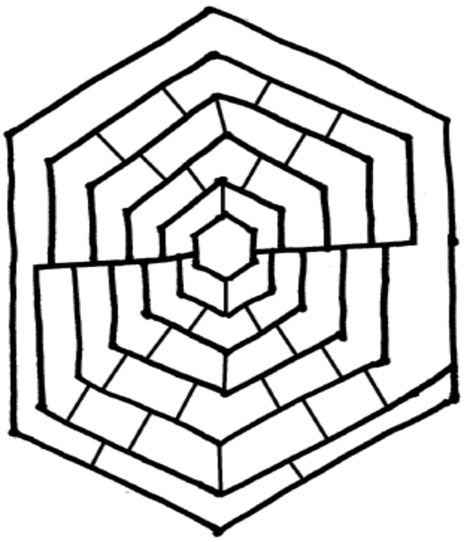
Prendiamo in considerazione altre mappe. Quanti colori sono sufficienti per colorare le mappe in modo tale che regioni confinanti abbiano colori diversi?

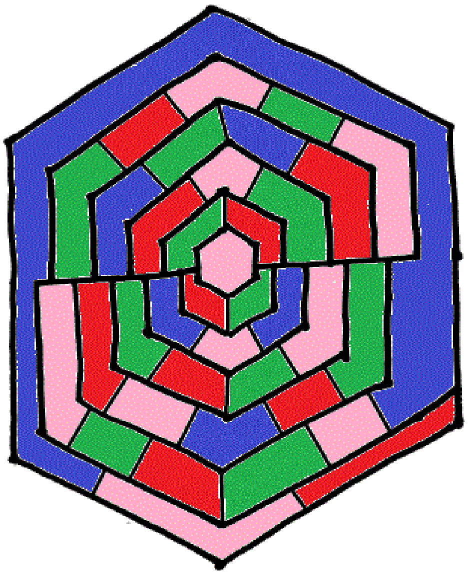












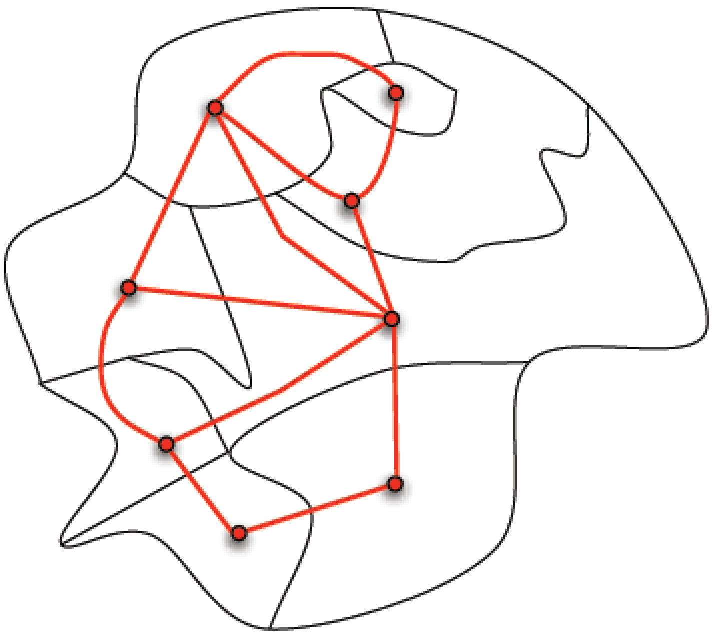
Formalizzazione del problema

Come abbiamo appena visto, esistono mappe colorabili con due o tre colori soltanto. Per tutte le altre mappe che abbiamo considerato, invece, sono stati sufficienti quattro colori diversi.

Ma allora: per qualsiasi mappa sono sufficienti quattro colori oppure siamo noi incapaci a trovare una mappa talmente complicata che necessiti di più colori?

Quello che ci preme sottolineare fin da adesso è che il problema della colorazione delle mappe è un **problema di natura topologica**. Tanto per cominciare, si nota subito che per il problema non sono rilevanti la dimensione o la forma delle regioni o la lunghezza dei loro contorni ma solamente il modo in cui le regioni sono disposte, il gioco delle loro relazioni di "vicinato".

Innanzitutto cerchiamo di tradurre il problema in termini matematici. Ancora una volta, i grafi sono la chiave per interpretare il nostro problema topologico. **Possiamo** infatti **associare alla nostra cartina un grafo** procedendo nel modo seguente: *scegliamo un vertice all'interno di ogni regione* e *colleghiamo due vertici con un lato se le regioni a cui appartengono sono confinanti*. È possibile disegnare questo lato in modo che sia tutto all'interno delle due regioni in questione (vedi la figura qui sotto).



Come associare un grafo ad una carta geografica

Ma che tipo di grafo otteniamo? Un grafo planare connesso.
Dunque da ogni mappa è possibile ottenere un grafo planare connesso. Vale anche il viceversa: si vede facilmente infatti che, dato un grafo planare connesso, possiamo costruire una mappa il cui grafo corrispondente è proprio quello dato.

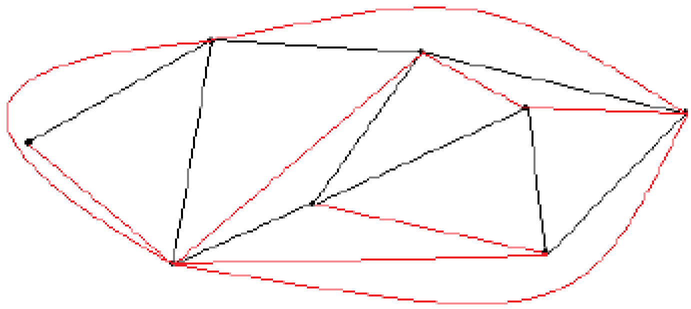
Quindi il nostro problema può essere riformulato nel seguente: quanti colori servono per colorare i vertici di un grafo planare connesso in maniera tale che due vertici collegati non abbiano lo stesso colore?

Quello che vogliamo fare ora è dimostrare che servono al più 5 colori, cioè vogliamo dimostrare che *ogni grafo planare connesso è 5-colorabile*.
Questo risultato è noto come **teorema dei cinque colori** e, come abbiamo già detto, fu provato nel 1890 da Heawood nel tentativo di risolvere il famoso problema dei quattro colori partendo dalle idee dell'avvocato e matematico amatore Alfred Kempe.

Ma per dimostrare il teorema dei cinque colori ci serve il lemma seguente.
Lemma In ogni grafo planare connesso c'è almeno un vertice che è collegato con al più 5 vertici.

Dimostrazione Lemma
Ricordiamo che per ogni grafo planare connesso $V - S + F = 2$, dove V è il numero di vertici, S il numero di spigoli e F il numero di regioni in cui il grafo divide il piano (compresa la regione esterna illimitata).

Consideriamo un grafo planare connesso e aggiungiamo, se necessario, dei lati in maniera tale che ogni regione (anche quella esterna) sia delimitata da 3 lati. Un grafo di questo tipo ha più lati per ogni vertice. Quindi se dimostriamo l'affermazione per un grafo di questo tipo, varrà a maggior ragione per quello originale.



Ora in questo tipo di grafi, ad ogni regione corrispondono 3 lati, ma ogni lato è condiviso da 2 regioni, e quindi vale: $3 \cdot regioni = 2 \cdot lati$.
Se usiamo questa uguaglianza nella relazione di Eulero (dove abbiamo moltiplicato entrambi i membri per 6) si ha che: $6 \cdot vertici - 2 \cdot lati = 12$.
Se chiamiamo v_i il numero di vertici da cui escono i lati, otteniamo che la quantità

$$1 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 3 \cdot v_3 + 4 \cdot v_4 + \cdots + N \cdot v_N$$

è pari a $2 \cdot lati$, dato che ogni lato collega due vertici. Quindi: $6 \cdot vertici - 2 \cdot lati = 12$ diventa

$$6 \cdot [v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + \cdots + v_N] - [1 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 3 \cdot v_3 + 4 \cdot v_4 + \cdots + N \cdot v_N] = 12.$$

Ne segue che almeno uno tra v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 deve essere diverso da zero, altrimenti la quantità a sinistra dell'equazione di sopra sarebbe negativa, mentre a destra abbiamo 12, che è positivo.
Abbiamo quindi dimostrato quanto voluto.

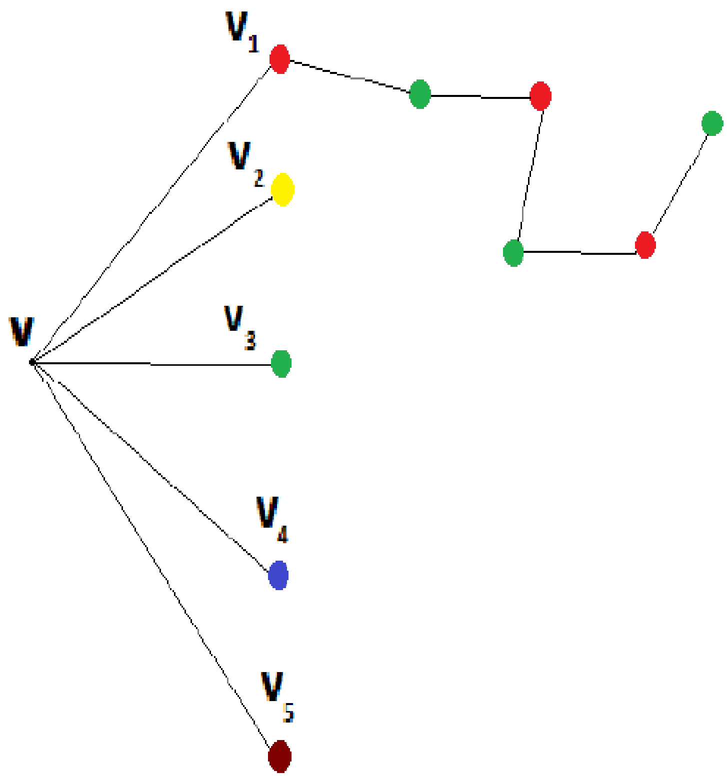
Dimostrazione Teorema dei cinque colori

Indichiamo n con il numero di vertici di un grafo planare connesso.
Se n è minore o uguale a 5, il grafo è chiaramente 5-colorabile (perché se i vertici sono al massimo 5, è evidente che 5 colori sono sufficienti).
Ora consideriamo il caso $n > 5$, cioè consideriamo i grafi planari connessi con più di 5 vertici e dimostriamo che anch'essi sono 5-colorabili. Ma come possiamo procedere? Possiamo ragionare **per induzione**: supponiamo cioè che i grafi planari connessi con $n-1$ vertici siano 5-colorabili (tale *ipotesi* è detta *induttiva*) e, sapendo ciò, cerchiamo una tecnica che permetta di 5-colorare i grafi planari connessi con n vertici. Se troviamo una tale tecnica, abbiamo dimostrato il teorema.

Per il lemma precedente sappiamo che c'è un vertice v che è collegato con al più 5 vertici.
Togliamo questo vertice e tutti i lati ad esso collegati. Otteniamo quindi un grafo con $n-1$ vertici, che per ipotesi induttiva è 5-colorabile.

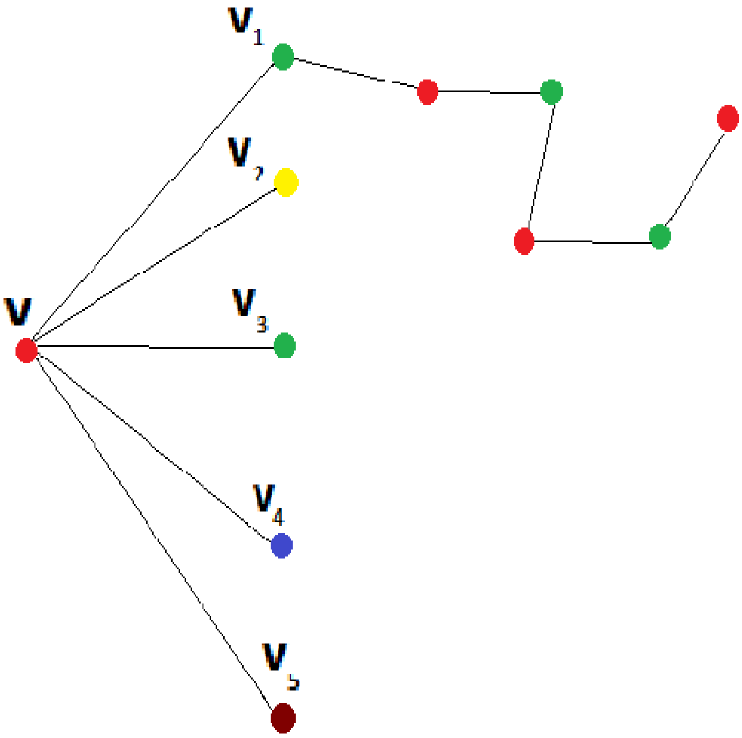
Ora si presentano due casi.

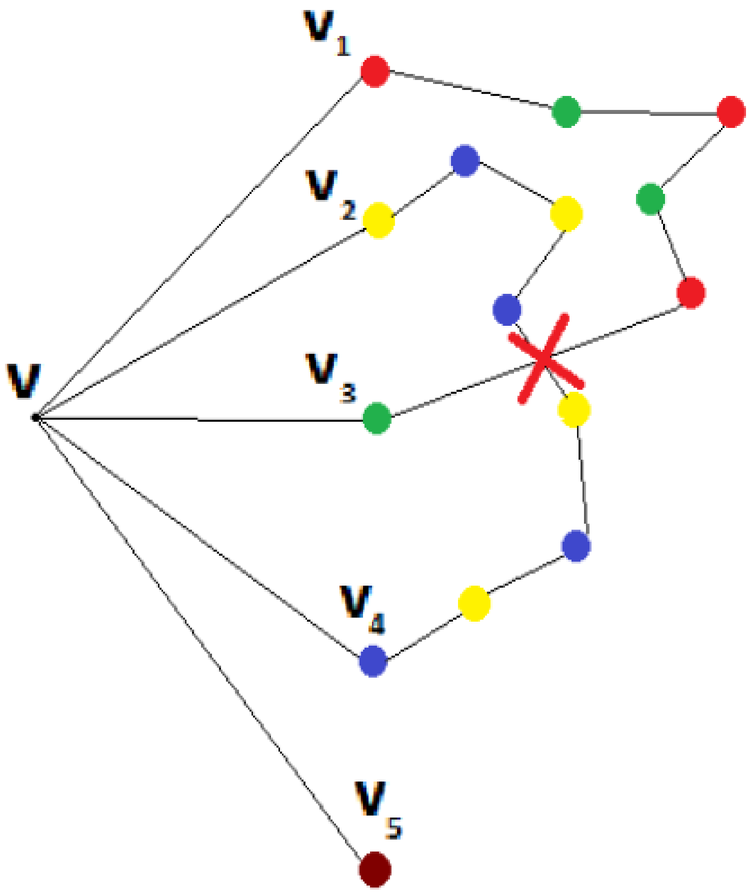
- Se il vertice v era collegato con 1, 2, 3 o 4 vertici, o con 5 vertici ma con almeno un colore ripetuto, allora possiamo colorare v con uno dei colori che non sono stati utilizzati per colorare i vertici a cui era collegato. Riusciamo quindi a 5-colorare l'intera mappa.
- Se v invece era collegato con 5 vertici tutti di colore diverso ragioniamo come segue.



Partiamo dal vertice rosso v_1 e ci spostiamo solo tra vertici adiacenti che sono rossi o verdi. Otteniamo quindi una catena di vertici tutti rossi e verdi.

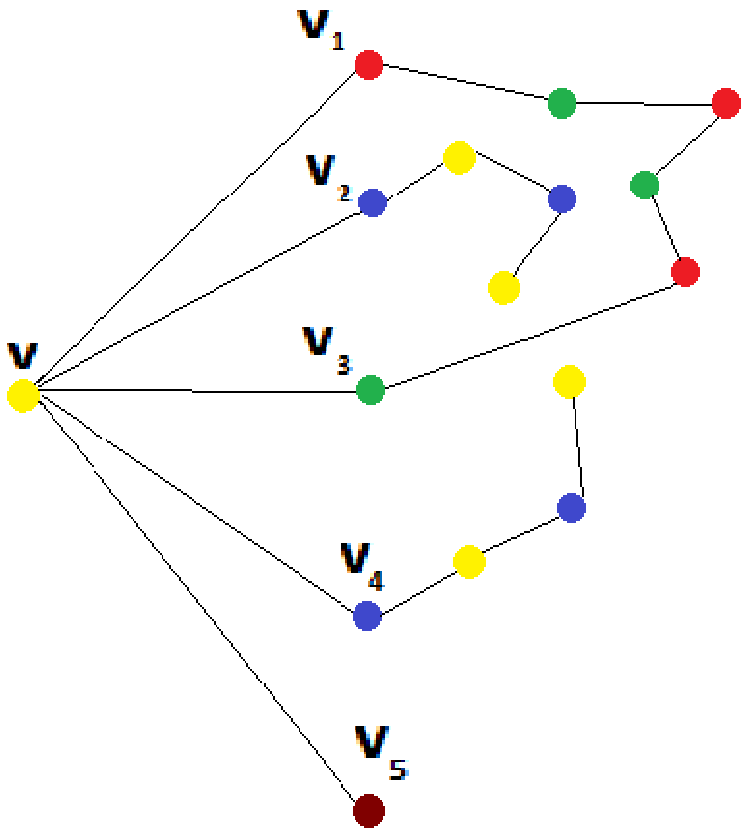
Scambiamo quindi il rosso con il verde.
Ora, se il vertice v_3 non è nella nostra catena, vuol dire che v_3 e v_1 sono colorati di verde, e quindi possiamo colorare il vertice v di rosso.





Se invece i vertici v_1 e v_3 sono collegati da una catena di vertici rossi e verdi, allora tale catena, unita ai lati congiungenti v_1 e v_3 con v, forma una curva che separa i vertici v_2 e v_4. Dato che le linee non si possono intersecare e i vertici della catena che circonda v_2 sono solo rossi o verdi, v_2 e v_4 non potranno essere collegati da una catena di vertici gialli e blu.

Quindi possiamo considerare una catena di soli vertici gialli e blu che parte da v_2 e scambiarne i colori. In tal modo il vertice v_2 sarà colorato di blu, e potremo quindi colorare il vertice v di giallo.



La dimostrazione del teorema dei cinque colori è così conclusa.

Ma rimane la domanda: bastano quattro colori o esiste una mappa che ne richiede cinque?
Bastano in effetti 4 colori, ma noi non dimostreremo questo fatto.
Come abbiamo detto prima, infatti, la dimostrazione del teorema dei quattro è molto complicata e fa pesante uso del computer.

Generalizzazione

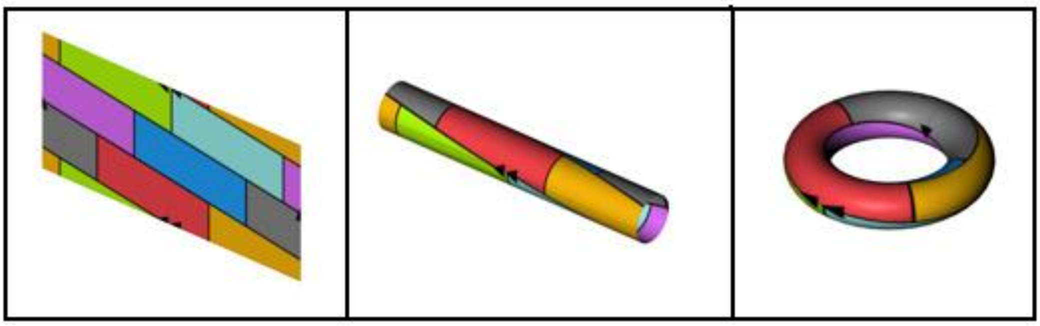
Il teorema vale per mappe disegnate sul piano (e quindi anche sulla sfera). Ma in generale che dire delle mappe disegnate su una superficie?

Per le superfici chiuse di genere[1] positivo (come per esempio il toro) il numero minimo di colori necessari, che denotiamo con p, dipende dalla caratteristica di Eulero χ della superficie in accordo con la formula:

$$p = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi}}{2} \right\rfloor$$

dove le parentesi più esterne stanno ad indicare la funzione parte intera.

Esempio La scorsa lezione abbiamo visto che il **toro** ha caratteristica di Eulero $\chi = 0$. Pertanto nel caso del toro $p = 7$, il che significa che **saranno sufficienti sette colori per colorare qualsiasi mappa** su una superficie toroidale.



Al di là delle particolari cartine scelte e dei molti casi analizzati, il **numero minimo di colori dipende** solamente **dalla natura topologica dell'oggetto su cui la cartina è disegnata**.
In altre parole possiamo dire che il numero minimo di colori dipende dalla forma del "mondo" su cui stiamo disegnando la nostra cartina: visto che il pianeta Terra ha forma sferica, la risposta al problema è quattro; se fosse stato a forma di ciambella, la risposta sarebbe stata sette.

[1] Il *genere* di una superficie è il numero di buchi della superficie stessa. Questa però non è la definizione rigorosa, si tratta piuttosto di una definizione informale, intuitiva.

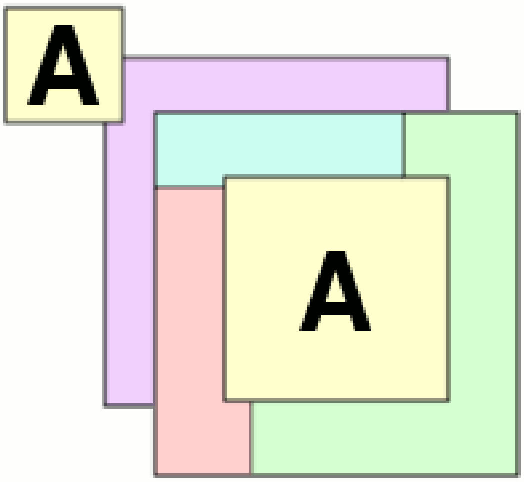
Carte geografiche alle quali il teorema non è applicabile

Finora abbiamo considerato mappe ideali, in cui ogni regione era connessa.
Nella realtà però esistono stati il cui territorio, anche se si escludono le isole, costituisce un insieme non connesso: ne è un esempio l'Alaska come parte degli Stati Uniti.

Nella figura qui a fianco l'Alaska è colorata in rosso, mentre gli Stati Uniti in bianco.

Noi però vogliamo colorare tutto il territorio di uno stesso stato con il medesimo colore.
Saranno ancora sufficienti quattro colori? Vediamo subito un esempio.

Esempio Consideriamo la seguente mappa semplificata.



In questa mappa le due regioni indicate con A fanno parte dello stesso stato e devono avere pertanto la stessa colorazione. Dalla figura è evidente che quattro colori non sono sufficienti, serve un colore in più.

Abbiamo appena visto che **per mappe aventi regioni non connesse non sono sufficienti quattro colori**. Osserviamo che ad una mappa con regioni non connesse corrisponde un grafo non planare. Questo perché ci troviamo a dover collegare due regioni non confinanti e ciò è possibile solamente aggiungendo un manico, una sorta di "ponte sopraelevato". Ma allora l'ipotesi di connessione delle regioni è fondamentale affinché valga il teorema dei quattro colori: facendo cadere l'ipotesi di connessione, infatti, violiamo automaticamente anche l'ipotesi di planarità.