

(1) osservo che $\lim_{x \rightarrow 0} \log(2+3x+\sin 3x) = \log 2 \neq 0$ 1

e che $x - \sin x = x - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

quindi che è inutile sviluppare il denominatore a un grado superiore a 3.

$$\log(1+3x) = 3x - \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^3}{3} + o(x^3)$$

$$\log(1+\sin(3x)) = \sin(3x) - \frac{\sin^2(3x)}{2} + \frac{\sin^3(3x)}{3}$$

$\uparrow$ poiché $\sin(3x) \rightarrow 0$
 $x \rightarrow 0$

$$+ o(\sin^3(3x))$$

$x \rightarrow 0$

$$= 3x - \frac{(3x)^3}{6} + o(x^3) - \frac{(3x + o(x^2))^2}{2} + \frac{(3x + o(x^2))^3}{3}$$

$$+ o(x^3) \quad \text{poiché } \sin(3x) \sim_{x \rightarrow 0} x$$

$$= 3x - \frac{(3x)^3}{6} - \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^3}{3} + o(x^3).$$

Il numeratore vale quindi:

$$- \left[3x - \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^3}{3} + o(x^3) \right] + \left[3x - \frac{(3x)^3}{6} - \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^3}{3} + o(x^3) \right] = -\frac{3^3 \cdot x^3}{6} + o(x^3).$$

Devo quindi calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{3^3 \cdot x^3}{6} + o(x^3)}{\log(2) \cdot \left(\frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{27}{6} + o(1)}{\log(2) \cdot \left(\frac{1}{6} + o(1)\right)}$$

$$= -\frac{27}{6} \cdot \frac{6}{\log(2)} = -\frac{27}{\log(2)} \quad \square$$

$$(2) \int_0^4 (x^2 + 4x) \cdot e^{-x^2 - 4x} \cdot (2x + 4) dx =$$

$$= \int_0^{32} y \cdot e^{-y^2} dy$$

pongo $y = x^2 + 4x$, $dy = (2x + 4) \cdot dx$,

$$0 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 32$$

$$= \int_0^{32} \frac{1}{-2} \frac{d}{dy} (e^{-y^2}) dy = -\frac{1}{2} (e^{-y^2})_0^{32}$$

$$= -\frac{1}{2} (e^{-32} - 1) = \frac{1}{2} (1 - e^{-32}).$$

$$(3) f(x) = (3x - 7) e^{-|x-2|}$$

Domínio(f) = $\mathbb{R}$, f continue in $\mathbb{R}$.

Domínio(f') = $\mathbb{R} - \{2\}$ e per $x=2$

vediamo in seguito.

$$f'(x) = 3 \cdot e^{-|x-2|} - (3x-7) \cdot \text{sgn}(x-2) e^{-|x-2|}$$

$$= e^{-|x-2|} \cdot (3 - (3x-7) \cdot \text{sgn}(x-2)).$$

Se $x > 2$, $f'(x) = e^{-|x-2|} \cdot (3 - 3x + 7) = e^{-|x-2|} \cdot (10 - 3x) \geq 0$

$$\Leftrightarrow 10 - 3x \geq 0:$$

$$\begin{cases} x > 2 \\ 10 - 3x \geq 0 \end{cases} \quad \boxed{2 < x \leq \frac{10}{3}}$$

Se $x < 2$, $f'(x) = e^{-|x-2|} \cdot (3 + 3x - 7) = e^{-|x-2|} \cdot (3x - 4) \geq 0$

$$\Leftrightarrow 3x - 4 \geq 0$$

$$\begin{cases} x < 2 \\ 3x - 4 \geq 0 \end{cases} \quad \boxed{\frac{4}{3} \leq x < 2}$$

f cresce in $[2, \frac{10}{3}]$ e $[\frac{4}{3}, 2]$ (perché è
continua!), quindi cresce in $[\frac{4}{3}, \frac{10}{3}]$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = 4 \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = 2 \neq 4 :$$

3

f non è derivabile in $x=2$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-7}{e^{|x-2|}} = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-7}{e^{|x-2|}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

Conclusioni:

(i) f è continua su Dominio (f) = $\mathbb{R}$

(ii) Dominio (f') = $\mathbb{R} - \{2\}$ e

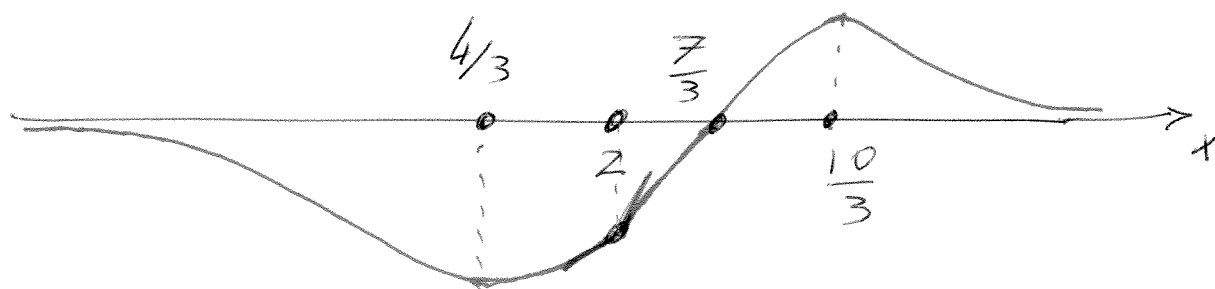
$$f'(x) = e^{-|x-2|} (3 - (3x-7) \cdot \operatorname{sgn}(x-2))$$

(iii) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$

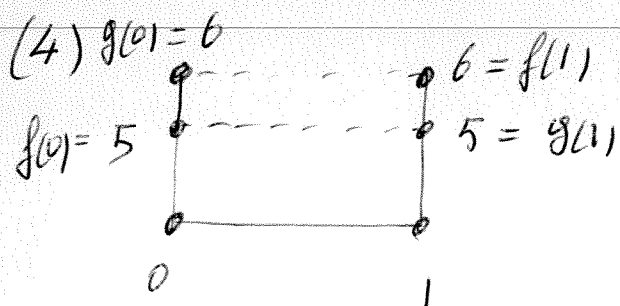
(iv) f cresce su $[\frac{4}{3}, \frac{10}{3}]$,

decresce su $(-\infty, \frac{4}{3}]$ e su $[\frac{10}{3}, +\infty)$.

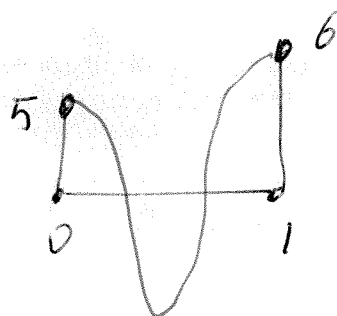
(v)



[Per un grafico migliore, calcolare f''].



- f e g non sono necessariamente derivabili, la seconda risposta è quindi errata.
- non è detto che f sia costante; p.e.s.:



(certamente, f non è costante su $[0, 1]$!).

- Sia $h(x) = f(x) + g(x)$, $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$h \text{ è continua e } h(0) = f(0) + g(0) = 11 \\ = f(1) + g(1) = h(1),$$

ma nulla ci dice su $h(x) = 0$!

- Sia $h(x) = f(x) - g(x)$, $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua:

$$h(0) = f(0) - g(0) = 5 - 6 = -1 < 0$$

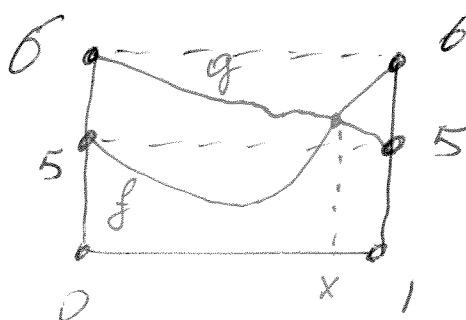
$$h(1) = f(1) - g(1) = 6 - 5 = 1 > 0.$$

Per il Teorema degli zeri, $\exists x \in [0, 1]$:

$$h(x) = 0.$$

Del resto:

(è anche intuitivo).



5

$$(5) \frac{g^{n+4} + 8^n}{3^{2n+4} + n \cdot 8^n} = \frac{g^n \cdot g^4 + 8^n}{3^{2n} \cdot 3^4 + n \cdot 8^n}$$

$$= \frac{g^n \cdot g^4 + 8^n}{g^n \cdot 3^4 + n \cdot 8^n} = \frac{\cancel{g^4}}{\cancel{g^n}} \cdot \frac{g^4 + \left(\frac{8}{g}\right)^n}{3^4 + n \cdot \left(\frac{8}{g}\right)^n} = (*)$$

Ora: $n \cdot \left(\frac{8}{g}\right)^n = \frac{n}{\left(\frac{g}{8}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

perché $\frac{g}{8} > 1$, quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (*) = \frac{g^4}{3^4} = \left(\frac{g}{3}\right)^4 = 3^4 = 81.$$