

Bordi e interni

N. Arcozzi

June 13, 2011

Abstract

Una chiaccherata sull'importanza di costruire i bordi di alcuni oggetti e gli interni di altri. Prerequisiti: definizione di convoluzione e proprietà elementari della trasformata di Fourier in \mathbb{R} , geometria differenziale delle superfici (elementarissima), la probabilità di testa-o-croce.

Iniziamo col considerare il problema di analizzare una funzione di variabile reale a diverse scale. Ciò ci porta all'integrale di Poisson. Il fattore di scala verrà considerato come una seconda variabile, che ci induce a considerare la retta \mathbb{R} come bordo del semipiano superiore \mathbb{R}_+^2 . La geometria intrinseca al problema del riscaldamento è quella iperbolica. Vedremo come alcuni oggetti iperbolici (bidimensionali) e euclidei (unidimensionali) entrano in rapporto tra loro "intrinsecamente". In particolare, cercheremo di capire come un "osservatore iperbolico" possa concepire l'inaccessibile bordo del suo spazio. Considereremo poi di passaggio un modello discreto-probabilistico simile a quello continuo-analitico, con cui è peraltro in relazione.

Contents

1	Guardare una funzione a diverse scale	1
1.1	Un primo tentativo.	1
1.2	Alcune proprietà desiderabili.	2
2	La disuguaglianza di Harnack per l'integrale di Poisson	3
3	La metrica iperbolica	5
3.1	Distanza e geodetiche.	6
3.2	Orocioli e coni.	7
4	Il bordo del piano iperbolico.	7
5	Martingale.	8
6	Conclusioni.	9

1 Guardare una funzione a diverse scale

Supponiamo che gli oggetti che vogliamo analizzare siano funzioni in $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ (buone proprietà per gli integrali e per le trasformate di Fourier): segnali o altro. Rileviamo il segnale f con un apparato $\mathcal{T} = \{T_t\}_{t>0}$ dove, per ogni $t > 0$, la rilevazione fatta da T_t (l'apparato \mathcal{T} modulato a precisione t) vede f "a scala t ", perdendo -in un certo senso- i dettagli di dimensione inferiore. Cosa vuol dire questo?

1.1 Un primo tentativo.

Iniziamo con l'esempio più semplice, in cui consideriamo solo scale "diadiche" $t_n = 2^{-n}$, $n \in \mathbb{Z}$. Per $n \in \mathbb{Z}$ fissato e per $j \in \mathbb{Z}$, poniamo

$$T_n f(j) = \frac{1}{2^{-n}} \int_{\frac{j-1}{2^n}}^{\frac{j}{2^n}} f(y) dy. \quad (1)$$

è utile pensare a $T_n f$ come a una funzione a scala definita su \mathbb{R} :

$$f_n = \sum_{j \in \mathbb{Z}} T_n f(j) \chi_{[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n})}.$$

La successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ è una *martingala* (lo è nel senso solito se f è supportata in $[0, 1]$), lo studio delle cui proprietà è un capitolo importante della teoria delle probabilità su cui torneremo.

Questa definizione è assai particolare e presenta alcune caratteristiche “innaturali”:

- i razionali diadici hanno un ruolo privilegiato (si potrebbe rimediare facendo medie di f su ogni intervallo);
- anche quando la funzione f è liscia, le funzioni f_n hanno dei salti.

1.2 Alcune proprietà desiderabili.

- (L) **Linearità.** $T_t(af + bg) = aT_t f + bT_t g$. Non ci sono effetti di “retroazione”.
 (T) **Traslazioni.** L'apparato \mathcal{T} dev'essere invariante rispetto alle traslazioni; se

$$\tau_a f(x) = f(x - a),$$

ragionevolmente vale che

$$\tau_a \circ T_t = T_t \circ \tau_a. \quad (2)$$

Il significato della richiesta è che l'apparato agisca sul segnale *uniformemente nel tempo*: se il segnale passa attraverso l'apparato in ritardo di un tempo a , si ottiene la risposta che si sarebbe ottenuta originalmente, solo ritardata dello stesso ammontare a .

- (D) **Dilatazioni.**

$$T_{t/\lambda} \circ \delta_\lambda = \delta_\lambda \circ T_t, \quad (3)$$

dove

$$\delta_\lambda f(x) = \lambda^{-1} f(\lambda^{-1} x).$$

Il significato è: guardare il segnale f alla scala t , poi dilatarlo di λ , è lo stesso che guardare il segnale dilatato $\delta_\lambda f$ alla scala t/λ .

- (S) **Stabilità.** Il segnale $T_t f$ deve conservare alcune proprietà quantitative del segnale f ; diciamo quelle che permettono di reiserire $T_t f$ nello stesso apparato (cioè, di calcolare $T_s(T_t f)$). Per esempio,

$$\|T_t f\|_{L^p} \leq C(t) \|f\|_{L^p},$$

per qualche $p \in [1, \infty]$, o in qualche altra norma.

- (C) **Continuità.** All'approssimarsi di t a 0, il segnale $T_t f$ è una riproduzione sempre più efficiente del segnale originale f :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T_t f = f \text{ in qualche senso,}$$

per esempio puntualmente, o nella norma di cui al punto precedente.

- (SG) **Semigruppato.** Guardando il segnale f alla scala t , quindi guardare $T_t f$ alla scala s equivale a guardare f alla scala $t + s$. La ragione di fondo è che il segnale “perde il dettaglio” su scale inferiori di t , prima, e di s , dopo: ogni dettaglio a scale inferiori a $t + s$ dovrebbe essere andato perduto.

- (P) **Positività.** $f \geq 0 \implies T_t f \geq 0$. Cioè, se il segnale f è più grande del segnale g , $f \geq g$, allora $T_t f \geq T_t g$.

Vedremo ora cosa la trasformata di Fourier ci dice su \mathcal{T} , supponendo che, per comodità, si abbia che (S) e (C) valgono per $1 \leq p \leq 2$.

Breve richiamo sulle trasformate di Fourier. Per $f \in L^1 + L^2$, definiamo

$$\mathcal{F}f(\zeta) = \hat{f}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\zeta x} f(x) dx.$$

Abbiamo le seguenti proprietà:

- $\mathcal{F}(\tau_a f)(\zeta) = e^{-ia\zeta} \mathcal{F}f(\zeta)$;
- $\mathcal{F}(\delta_\lambda f)(\zeta) = \mathcal{F}f(\lambda\zeta)$;
- $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g$, dove

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y) dy$$

è la *convoluzione* di f e g .

- $\mathcal{F}(\mathcal{F}f)(x) = 2\pi f(-x)$.

- $\|\mathcal{F}f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

Tutte queste proprietà valgono sotto l'ipotesi che f e g stiano in L^1 . In particolare, ciò implica che $f * g \in L^1$.

Traduciamo ora alcune richieste viste sopra in termini della trasformata di Fourier (in successione: a ogni richiesta si suppone che anche quelle precedenti siano soddisfatte).

- **(L), (T) e (S)** $\iff \mathcal{F}(T_t f)(\zeta) = m_t(\zeta)\hat{f}(\zeta)$, dove il *moltiplicatore* $m_t = \hat{\mu}_t$ è la trasformata di Fourier di una misura di Borel finita μ_t (in particolare, m_t è continua).
- **(D)** $\iff m_t(\zeta) = m(t\zeta)$, con $m = m_1$. Poniamo anche $\mu = \mu_1$.
- **(P)** $\iff \mu_t$ è una misura positiva per ogni $t > 0$.
- **(C)** $\iff m_t(0) = 1$.
- **(SG)** $\iff m_t(\zeta) = e^{-t\varphi(\zeta)}$, per qualche funzione ζ .

Tradotto in termini delle misure μ_t , si ha che (L), (T), (S), (D), (P), (C) valgono se

$$T_t f(x) = 1/t \int_{\mathbb{R}} f(x-y) d\mu(y/t),$$

dove $\mu \geq 0$ è una misura di probabilità.

Vediamo alcuni casi particolari importanti.

- **Nucleo di Poisson.**

$$\mu(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} dx, \quad m_t(\zeta) = e^{-t|\zeta|}.$$

Osservare che vale anche (SG). Si ha dunque,

$$T_t f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{t}{t^2 + y^2} f(x-y) dy.$$

- **Nucleo del calore.**

$$\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2t^2}} f(x-y) dy, \quad m_t(\zeta) = e^{-t^2|\zeta|^2}.$$

In questo caso, (SG) non vale direttamente, ma vale che $T_{\sqrt{t+s}} = T_{\sqrt{t}} \circ T_{\sqrt{s}}$.

La presenza della radice è responsabile della particolare geometria delle soluzioni dell'equazione del calore, nonché della non differenziabilità dei cammini browniani (più precisamente, della loro hoelderianità ottimale), della presenza di un termine quadratico nella formula di Ito, eccetera...

- **Medie su intervalli** (citate all'inizio). In questo caso $\mu_t(x) = \frac{1}{t} \chi_{[-t/2, t/2]}(x) dx$, la trasformata di Fourier è $\mathcal{F}m_t(\zeta) = \frac{\sin(t\zeta)}{t\zeta}$ (la funzione "sinc" del Teorema di Campionamento di Shannon) e

$$T_t f(x) = \frac{1}{t} \int_{x-t/2}^{x+t/2} f(y) dy.$$

Anche in questo importante caso (SG) non vale, né è, al contrario del caso precedente, recuperabile cambiando la scala.

Ci concentreremo sul nucleo di Poisson perché soddisfa tutte le proprietà desiderate, ma anche perché ha una sua autonoma importanza (in analisi matematica, in fisica, in probabilità e, nelle sue estensioni, in geometria). Saremo naturalmente portati a considerare una geometria "intrinseca" all'integrale. Anche gli altri nuclei che abbiamo visto (e molti che non abbiamo visto) hanno la loro importanza e la loro peculiare geometria.

2 La disuguaglianza di Harnack per l'integrale di Poisson

Il nostro segnale, visto a ogni possibile scala, è ora diventato una funzione

$$u(x, t) = T_t f(x), \quad u : \mathbb{R}_+^2 = \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R},$$

dove, ricordiamo,

$$T_t f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{t}{t^2 + y^2} f(x-y) dy.$$

Lo spazio che ora ci interessa è ora il semipiano superiore \mathbb{R}_+^2 . La geometria che abbiamo utilizzato su \mathbb{R} è la geometria euclidea.

Qual è la geometria su \mathbb{R}_+^2 che emerge naturalmente dal nostro problema?

Vediamo ora come il “dettaglio” di $T_t f(x)$ non cambi di molto (i) tenendo t fissato e considerando x alla scala t ; ovvero (ii) tenendo x fissato, ma raddoppiando la scala.

Theorem 1. *Disuguaglianza di Harnack.* Sia $u(x, t) = T_t f(x)$, con $f \geq 0$, $f \in L^1$. Se $(x, t), (x', t') \in \mathbb{R}_+^2$ e

$$1/2 \leq t'/t \leq 2, \quad |x - x'| \leq \max(t, t'),$$

allora

$$u(x, t) \leq C u(x', t'),$$

dove C è una costante universale.

Prima di dimostrare il teorema, vediamo il suo significato geometrico. La funzione u è pressoché costante (in senso “moltiplicativo”) su quadrati del tipo

$$Q(t_0, x_0) = \{(x, t) : |t - t_0| \leq t_0/2, |x - x_0| \leq t_0/2\}.$$

Proof. Iniziamo col calcolare

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{t}{t^2 + y^2} dy \\ &\approx \frac{1}{t} \left[\int_{|y/t| \leq 1} f(y) dy + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 2^{2n}} \int_{2^{n-1} \leq |y/t| \leq 2^n} f(y) dy \right] \\ &\approx u(0, 2t). \end{aligned}$$

Per il prossimo calcolo, si tenga conto del fatto che, se $|x/t| \leq 1$ e $2^{n-1} \leq |(x-y)/t| \leq 2^n$, allora

$$(2^n - 1)t \leq |x - y| - |x| \leq |y| \leq |x - y| + |x| \leq (2^n + 1)t.$$

$$\begin{aligned} u(x, t) &\approx \frac{1}{t} \left[\int_{|(x-y)/t| \leq 1} f(y) dy + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 2^{2n}} \int_{2^{n-1} \leq |(x-y)/t| \leq 2^n} f(y) dy \right] \\ &\lesssim \frac{1}{t} \left[\int_{|y/t| \leq 1} f(y) dy + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 2^{2n}} \int_{2^{n-1} \leq |y/t| \leq 2^n} f(y) dy \right] \\ &\approx u(0, t). \end{aligned}$$

■

Nella stima approssimata di $u(0, t)$ è riapparsa la “martingala” (1). Vale la pena di soffermarsi su questo punto. Sia $I(2^n t) = [-\frac{2^n t}{2}, \frac{2^n t}{2}]$. Allora,

$$u(0, t) \approx \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{1}{|I(2^n t)|} \int_{I(2^n t)} f(y) dy. \quad (4)$$

Questa forma non è esattamente uguale a quella incontrata prima, dove al posto degli intervalli più grandi abbiamo delle “corone” (la differenza tra due intervalli di diversa grandezza). Possiamo dedurre (4) dalla formula per $u(0, t)$, “sommando per parti” e utilizzando il decadimento geometrico dei pesi che intervengono. [**Esercizio:** verificare quanto appena detto.]

Il termine principale ($t = 0$) è una media su un intervallo. I termini successivi sono medie su intervalli più grandi, la cui influenza sull'integrale decade col peso 2^{-n} . Sostanzialmente, abbiamo l'approssimazione “martingala”, resa più liscia facendo intervenire -con poco peso- anche i valori di f per x distante da $x = 0$.

Per meglio capire enunciato e dimostrazione, dividiamo \mathbb{R}_+^2 in quadrati diadici:

$$Q(n, j) = \{(x, t) : \frac{1}{2^{n+1}} \leq t < \frac{1}{2^n}, \frac{j-1}{2^n} \leq x \leq \frac{j}{2^{n+1}}\}.$$

La disuguaglianza di Harnack ci dice che la funzione u cambia al più di un fattore quando ci spostiamo da un quadrato a un quadrato adiacente. Se consideriamo punti $(x, t), (x', t') \in \mathbb{R}_+^2$ in due quadrati Q e Q' , avremo dunque che

$$u(x', t') \leq K \cdot C^N u(x, t),$$

dove N è il minimo numero di quadrati da attraversare per passare da (x, t) a (x', t') . Utilizziamo questa quantità per definire una *distanza* sul grafo G dei quadrati diadici. (In tale grafo, i *vertici*

sono i quadrati diadici e tra due vertici c'è un lato del grafo se le chiusure dei due quadrati hanno intersezione non vuota). La distanza $d(Q, Q')$ tra due quadrati è il minimo numero di lati di G che dobbiamo percorrere per andare da Q a Q' .

La disuguaglianza di Harnack diventa quindi (passando ai logaritmi)

$$|\log u(x', t') - \log u(x, t)| \leq C' d(Q, Q') + K'. \quad (5)$$

Questo risultato assomiglia a una condizioni di Lipschitz. Infatti lo è.

Remark 2. L'integrale di Poisson non nasce dall'analisi del segnale, ma dallo studio delle *funzioni armoniche*. Un calcolo diretto mostra che la funzione $P(x, t) = \frac{1}{\pi} \frac{t}{t^2 + x^2}$ è armonica,

$$\Delta P := \partial_{xx} P + \partial_{tt} P = 0.$$

Derivando sotto segno d'integrale, abbiamo che $\Delta T_t f(x) = 0$. In questo seminario non utilizzeremo appieno questa importante proprietà.

3 La metrica iperbolica

Vorremmo però avere un contesto più preciso, che meglio rispecchi le invarianze del nostro problema. Cerchiamo quindi una metrica **riemanniana** su \mathbb{R}_+^2 che sia (i) invariante per *traslazioni* $(x, t) \mapsto (x+x_0, t)$ nella coordinata $x \in \mathbb{R}$ (siamo partiti da un problema invariante per traslazioni!) e (ii) invariante per *dilatazioni* $(x, t) \mapsto (\lambda x, \lambda t)$ (perché, per esempio, tale è la metrica su G che abbiamo associato alla disuguaglianza di Harnack). Una metrica con queste proprietà (sostanzialmente l'unica: ne esiste una famiglia a tre parametri reali soltanto) è la *metrica iperbolica*:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dt^2}{t^2},$$

(consapevolmente) studiata per la prima volta da Lobacevskij e da Bolyai negli anni '20 dell'800, per motivi del tutto diversi da quelli che ci interessano qui. La distanza riemanniana associata alla metrica verrà qui indicata con ρ .

È interessante notare che la metrica iperbolica è anche invariante per una trasformazione che nella nostra discussione iniziale non era stata considerata. Poniamo $z = x + it \in \mathbb{C}$. Allora, ds^2 è invariante per l'inversione

$$z \mapsto \text{Inv}(z) = -\frac{1}{z}.$$

Infatti, $\Im \text{Inv}(z) = t/|z|^2$, quindi (usando l'olomorfia per accorciare i conti)

$$\frac{|d\text{Inv}(z)|^2}{\Im \text{Inv}(z)^2} = |\text{Inv}'(z)|^2 \frac{|dz|^2}{t^2/|z|^4} = \frac{|dz|^2}{t^2}.$$

Per quanto detto sopra, la metrica iperbolica è dunque invariante per tutto il gruppo $SL(2, \mathbb{R})$:

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1.$$

Facciamo alcune osservazioni. Essendo una varietà bi-dimensionale, (\mathbb{R}_+^2, ds^2) non può avere un gruppo di isometrie di dimensione maggiore di tre (due per renderla omogenea, una per renderla isotropa), quindi quelle che abbiamo trovato sono *tutte* le isometrie del piano iperbolico. L'ultima trasformazione che abbiamo considerato non conserva gli spazi L^p da cui siamo partiti, introduce quindi una forma d'invarianza tutta particolare.

La distanza d definita in precedenza riproduce abbastanza fedelmente la metrica iperbolica ds^2 a larga scala.

Exercise 3. *Mostrare che esistono costanti $0 < C_1 < C_2$ t.c., se $z \in Q$ e $z' \in Q'$, allora*

$$C_1 \leq \frac{d(Q, Q') + 1}{\rho(z, z') + 1} \leq C_2.$$

In particolare, esiste una costante $C > 0$ t.c., se $\rho(z, z') \geq C$, allora $\rho(z, z') \approx d(Q, Q')$.

Exercise 4. *Utilizzare l'esercizio precedente per mostrare che l'area iperbolica dei dischi cresce esponenzialmente col raggio.*

La disuguaglianza di Harnack (5) diventa, in linguaggio iperbolico, la seguente affermazione metrica.

Corollary 5. *Esistono costanti positive C, K tali che, se $u(x, t) = T_t f(x)$, con $f \geq 0$, allora*

$$|\log u(z') - \log u(z)| \leq C\rho(z, z') + K.$$

Essendo questo un seminario espositivo, non ci s'è curati di avere i migliori risultati possibili. Per esempio:

- il Corollario 5 vale con $K = 0$;
- si può individuare il miglior valore di C .

3.1 Distanza e geodetiche.

Calcoliamo innanzitutto la distanza tra $(0, s)$ e $(0, t)$ con $0 < s < t$. Sia $\gamma = (\alpha, \beta) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una curva liscia tra questi due punti e calcoliamo

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} ds &= \int_a^b \frac{|\dot{\gamma}(\tau)|}{\beta(\tau)} d\tau \\ &\geq \int_a^b \frac{|\dot{\beta}(\tau)|}{\beta(\tau)} d\tau \\ &\geq \int_s^t \frac{du}{u} = \log(t/s) \\ &= \rho((0, s), (0, t)), \end{aligned}$$

avendosi uguaglianza ovunque per la curva (la *geodetica*) $\bar{\gamma}(\tau) = \tau$.

L'espressione per la distanza è in accordo con il principio per cui, raddoppiando la distanza euclidea dal bordo, la distanza iperbolica aumenta di una quantità fissata.

Per trovare la distanza tra due punti z e w in \mathbb{R}_+^2 in generale, ci basta trovare un'isometria $\varphi(\zeta) = \frac{a\zeta+b}{c\zeta+d}$ per cui $\varphi(z) = is$ e $\varphi(w) = it$, quindi utilizzare il conto precedente. Si può procedere per tentativi, ovvero considerare (i) che la geodetica che congiunge is e it è una retta perpendicolare a $\mathbb{R} = \partial\mathbb{R}_+^2$ e (ii) che le isometrie del piano iperbolico trasformano rette e circonferenze in rette e circonferenze, conservando gli angoli che questa fanno tra loro (conformalità). Quindi, la geodetica tra z e w sarà *la* circonferenza o *la* retta perpendicolare al bordo che contiene z e w .

Un diverso modello per il piano iperbolico. Ci dotiamo di un altro modello per il piano iperbolico. Consideriamo la mappa

$$z \mapsto \frac{i - z}{i + z},$$

(variabile complessa, conti assai più facili) che mappa il semipiano superiore \mathbb{R}_+^2 nel disco $\mathbb{D} = \{w \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 : |w| < 1\}$.

Exercise 6. Verificare i seguenti fatti.

1. La metrica iperbolica su \mathbb{D} (il disco di Beltrami-Poincaré) ha la forma

$$ds^2 = \frac{|dw|^2}{(1 - |w|^2)^2}.$$

2. Le isometrie della metrica iperbolica ghanno la forma

$$\varphi(w) = e^{i\theta} \frac{a - w}{1 - \bar{a}w},$$

dove $a \in \mathbb{D}$ e $\theta \in \mathbb{R}$.

3. La distanza iperbolica vale

$$\rho(z, w) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \left| \frac{z-w}{1-\bar{z}w} \right|}{1 + \left| \frac{z-w}{1-\bar{z}w} \right|}$$

4. L'immagine in \mathbb{D} delle rette $\mathbb{R} + it$ in \mathbb{R}_+^2 sono circonferenze tangenti a $\partial\mathbb{D}$ in $\zeta = -1$ (gli "orocicli").

3.2 Orocicli e coni.

Orocicli. Nell'approssimazione del nostro segnale hanno un ruolo importante le rette $\mathbb{R} + it$, che sono il luogo dove vive il segnale visto alla scala t . Queste rette hanno due geometrie: la geometria che viene dal segnale (dx) e a geometria iperbolica “del dettaglio” ristretta ad esse ($ds|_{\mathbb{R}+it} = \frac{dx}{t}$). Entrambe le geometrie sono euclidee, ma a scale diverse. La retta $\mathbb{R} + it$ con la geometria iperbolica è un *orociclo*.

(*Interpretazione:* la geometria del segnale è quella che ci dice dove andare a cercare un certo pezzo di segnale, alla scala t ; la geometria del dettaglio è quella che dà peso unitario alla scala a cui s'intravedono i dettagli: i segmenti $[a, a+t] + it$ hanno lunghezza unitaria).

Coni. Consideriamo la geodetica $\Gamma = \{it : t > 0\}$ in \mathbb{R}_+^2 . I coni (euclidei) aventi Γ come asse,

$$C_\alpha = \{x + it : |x/t| \leq \alpha\}$$

hanno un significato iperbolico. Esiste un numero $d(\alpha) > 0$ t.c.

$$C_\alpha = \{z \in \mathbb{R}_+^2 : \rho(z, \Gamma) \leq d(\alpha)\}$$

Exercise 7. Dimostrare l'affermazione precedente. Trovare una stima per $d(\alpha)$.

Non stupirà, allora, il seguente teorema sulla convergenza al bordo di u . Chiamo $C_\alpha(x_0)$ il cono C_α traslato sino ad avere vertice in $(x_0, 0)$.

Theorem 8. Sia u l'estensione di Poisson di f a \mathbb{R}_+^2 . Allora, per quasi ogni x_0 reale rispetto alla misura di Lebesgue in \mathbb{R} ,

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0) \text{ in } C_\alpha(x_0)} u(x,t) = f(x_0).$$

In forma narrativa, a meno di insiemi di misura nulla abbiamo convergenza di $u(x,t)$ a $f(x_0)$ se (x,t) si mantiene entro una distanza iperbolica costante dalla geodetica “verticale” avente vertice in $(x_0, 0)$. L'interpretazione in termini di approssimazione del segnale è questa: se per ogni $t > 0$ fissiamo un segmento iperbolico unitario attorno a x_0 sull'orociclo passante per (x_0, t) (cioè, il segmento attorno a cui “non emerge il dettaglio” del segnale approssimante), il valore della funzione approssimate $u(x,t)$ (con x nel segmento) è una riproduzione via via più fedele del segnale f originale.

4 Il bordo del piano iperbolico.

Descrivo qui a parole cose che sarebbero meglio rappresentate con figure. L'osservatore iperbolico vive in un universo omogeneo, isotropo e illimitato. Le sue misurazioni dirette non gli offrono ragioni di immaginare un “bordo”, più di quanto non lo offrano all'osservatore euclideo.

Nella geometria iperbolica *non vale* il postulato delle parallele: data una geodetica Γ e un punto P fuori da essa, esistono infinite geodetiche Γ' che passano per P e che non incontrano la geodetica Γ (un fatto che l'osservatore iperbolico può sperimentare con osservazioni, per esempio, osservando le traiettorie dei raggi di luce). Non tutte le configurazioni di Γ e Γ' , però, sono isometriche. (Questo accade anche nel piano: le configurazioni possibili di due rette parallele in \mathbb{R}^2 costituiscono, a meno di isometrie, una famiglia a un parametro reale, che possiamo intendere come dilatazione.)

Exercise 9. Mostrare che lo spazio iperbolico (\mathbb{R}_+^2, ds^2) non ha similitudini che non siano anche isometrie. (Questo fatto dice che la geometria a larga scala del piano iperbolico *non è* lo stesso che la geometria a piccola scala. Del resto, la geometria a scala infinitesima è euclidea, mentre quella a larga scala non lo è).

In genere, succede che la distanza tra due punti P e P' che si muovono a velocità costante su Γ e Γ' nella stessa direzione da un certo punto in poi aumenti (esponenzialmente). C'è una configurazione limite, però, in cui la distanza, invece, tende a un numero finito. [Di più, diminuisce esponenzialmente nel caso in cui i due punti abbiano una certa posizione relativa]. Sperimentalmente, due raggi di luce siffatti produrranno qualche tipo di interferenza.

Per noi gente euclidea, che osserva dall'esterno (nel modello di Beltrami) le vicissitudini iperboliche, la spiegazione è chiara: nel caso ordinario, i cerchi corrispondenti alle due rette non s'incontrano. Nel caso limite, i due cerchi sono tangenti.

Exercise 10. Dimostrare con figure e (pochi) conti quanto detto sopra. (Il modello del semipiano è più semplice.)

Il bordo del piano iperbolico si ottiene ora quotizzando l'insieme delle semirette geodetiche rispetto alla relazione d'equivalenza: $\Gamma \sim \Gamma'$ se e solo se $\rho(P, P') \rightarrow K \neq +\infty$ al tendere a infinito di punti P su Γ e P' su Γ' , che si muovono con la stessa velocità. Come dicevamo sopra, a noi euclidei non sfugge che il bordo del piano iperbolico è in corrispondenza biunivoca col bordo del modello di Beltrami-Poincaré.

Bordo e orocicli. Sia ζ un punto sul bordo e sia Γ_0 una geodetica fissata avente un estremo (a infinito) in ζ . Sia poi P_0 fissato su Γ_0 . Per ogni altro punto P del piano iperbolico, si consideri la quantità

$$\beta(P) = \lim_{Q \rightarrow \zeta} \sup_{\Gamma_0} [\rho(P, Q) - \rho(P_0, Q)].$$

La funzione β è chiamata *funzione di Busemann* e la sue curve di livello sono gli orocicli passanti (al bordo) per ζ . Nel modello di Beltrami, gli orocicli sono circonferenze passanti per ζ . Se Γ e Γ' sono geodetiche passanti per ζ e se P su Γ e P' su Γ' tendono a ζ in modo che l'orociclo per ζ passante per P passi anche per P' , allora $\rho(P, P') \rightarrow 0$ esponenzialmente.

In dimensione tre o superiore gli orocicli sono superfici sferiche di codimensione unitaria. Esattamente come nel caso bidimensionale visto più sopra, nel modello del semipiano, la metrica iperbolica ristretta agli orocicli è (isometrica alla metrica) euclidea. Nel caso a più dimensioni questo fatto è meno banale: nel caso bidimensionale l'orociclo, una curva infinita, ha per forza di cose una metrica euclidea. Se noi osservatori euclidei abbiamo esperienza di un mondo iperbolico (della stessa dimensione) studiando il modello di Beltrami-Poincaré; gli osservatori iperbolici (tridimensionali, per esempio) hanno nel loro universo delle copie (isometriche) del piano euclideo.

5 Martingale.

Cerchiamo di modellare probabilisticamente il gioco testa-o-croce, fatto con un'onesta moneta simmetrica. Con n lanci abbiamo 2^n possibili esiti, ciascuno avente probabilità 2^{-n} . Il modello che cerchiamo deve (i) permetterci di considerare sia la successione dei lanci, che ciascun lancio di per sé; (ii) tenendo conto del tempo che passa; (iii) si deve poter estendere a infiniti lanci.

Consideriamo a tal fine lo spazio di probabilità $[0, 1]$ (misura euclidea) e, per ogni $n \geq 0$, gli intervalli diadici $I_{n,j} = [(j-1)/2^n, j/2^n]$, $j = 1, \dots, 2^n$. Conveniamo di rappresentare l' n -esimo lancio (passaggio da $n-1$ a n) come un movimento di $\pm 2^{-n-1}$ (+ per testa, - per croce) dalla posizione precedente. La posizione iniziale è $1/2$.

Exercise 11. *Rappresentare graficamente con un albero la procedura qui descritta.*

Per esempio, se la successione è *TTC*, $n = 3$ e il nostro punto misura-configurazioni si trova al centro dell'intervallo $[6/2^3, 7/2^3] = I_{3,6}$. Le possibili configurazioni del gioco dopo n lanci sono parametrizzate dai 2^n intervalli $I_{n,j}$, la σ -algebra \mathcal{F}_n generata dai quali esprime la nostra "conoscenza" del processo (dello svolgimento del gioco) al tempo $n = 3$.

Se i due giocatori seguono regole eque (cioè, in cui entrambi hanno, a ogni lancio, lo stesso guadagno medio), allora la situazione patrimoniale di uno di loro al tempo n sarà una funzione f_n , che possiamo pensare come definita su $[0, 1]$, che è costante su ciascun $I_{n,j}$ (è, cioè, misurabile secondo \mathcal{F}_n) e che esprime, per l'appunto, quanto il giocatore possiede all'istante n se i lanci si sono succeduti nella maniera rappresentata da $I_{n,j}$.

L'equità del gioco dice che il valor medio del patrimonio all'istante $n+1$ è il patrimonio posseduto all'istante n . Cioè, se I_+ e I_- in \mathcal{F}_{n+1} sono le due metà di I in \mathcal{F}_n , allora

$$\frac{1}{2} (f_{n+1}(I_+) + f_{n+1}(I_-)) = f_n(I).$$

Questa relazione si esprime anche dicendo che $\{f_n\}$ è una *martingala* per la *filtrazione* $\{\mathcal{F}_n\}$ e la misura di probabilità scelta.

Theorem 12 (Teorema di Convergenza delle Martingale L^2). *Se esiste una costante C t.c.*

$$\int_{[0,1]} |f_n|^2 dx \leq C$$

per ogni n , allora esiste $f \in L^2([0, 1])$ t.c., se $I \in \mathcal{F}_n$, allora

$$f_n(I) = \frac{1}{|I|} \int_I f(x) dx.$$

La conclusione del teorema andrebbe confrontato con (1). Una martingala L^2 può essere interpretata come una variabile aleatoria f su $[0, 1]$ “vista a diverse scale” (probabilisticamente, sarebbe meglio dire: considerata con la conoscenza che abbiamo a un certo istante).

Per quanto riguarda la geometria, l'estensione di $[0, 1]$ (l'oggetto di cui $[0, 1]$ è il bordo) è in questo caso un albero. Tutta la teoria vista sin qui può essere estesa (in forma semplificata!) al contesto discreto degli alberi; con le martingale al posto delle funzioni armoniche.

Il bordo probabilistico è $[0, 1]$ dal punto di vista della teoria della misura, ma non dal punto di vista metrico. La metrica naturale è in questo caso una metrica rispetto a cui il bordo dell'albero è un insieme totalmente sconnesso e perfetto (un insieme di Cantor generalizzato).

6 Conclusioni.

Meta-esercizio. Siamo arrivati al modello del semipiano per lo spazio iperbolico partendo dalla retta reale (“segnali non periodici”). Abbiamo visto poi come, con una semplice mappa conforma, questo modello possa essere trasformato nel disco. Il bordo del disco è la circonferenza \mathbb{S} , dove le rotazioni svolgono il ruolo che fu delle traslazioni (“segnali periodici”).

Esercizio. *Rifare tutta la teoria delineata in questo seminario nel contesto periodico.*

Alcune letture per chi volesse approfondire.

- Duren, Peter L. Theory of H^p spaces. Pure and Applied Mathematics, Vol. 38 Academic Press, New York-London 1970 (ristampato da Dover).
- Durrett, Richard Brownian motion and martingales in analysis. Wadsworth Mathematics Series. Wadsworth International Group, Belmont, CA, 1984.
- Gallot, Sylvestre; Hulin, Dominique; Lafontaine, Jacques Riemannian geometry. Third edition. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- Math Explorer Club, M.C. Escher and Hyperbolic Geometry, <http://www.math.cornell.edu/~mec/Winter2009/Miha>
- Stein, Elias M.; Weiss, Guido Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces. Princeton Mathematical Series, No. 32. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971.
- Paolo Prandoni, Martin Vetterli, Signal Processing for Communications. Scaricabile da <http://www.sp4comm.org/>

Alcuni sviluppi.

- Abbiamo esteso il nostro segnale al semipiano superiore secondo Poisson. Avremmo anche potuto considerare la soluzione dell'*equazione del calore*, o altri semigrupp ancora.
- La scelta di rappresentare a diverse scale *il segnale in sé* ci ha portato verso la *teoria del potenziale*. Se avessimo scelto, come spesso si fa nelle applicazioni, di analizzare la *differenza tra valori del segnale* a scale successive (cioè, la differenza di dettaglio tra una scala più grossolana e quella più fine, che misura l'*emergere* del dettaglio, piuttosto che il dettaglio stesso), avremmo dovuto affrontare problemi di *analisi armonica*. (Analisi Armonica e Teoria del Potenziale sono sottodiscipline dell'analisi strettamente correlate e non possono essere separate se non artificialmente. Hanno, però, ciascuna un proprio specifico contenuto concettuale e metodologico). In particolare, avremmo imboccato il sentiero della *Teoria delle Ondine*.
- Non ho accennato ad alcuni fondamentali problemi. Per esempio, come possiamo (se possiamo) ricostruire il segnale f dalla sua estensione u ? Se una funzione u assomiglia all'estensione di un segnale f (è armonica), lo è veramente? Queste domande rientrano nella tematica della *convergenza al bordo* delle funzioni armoniche.
- Uno sviluppo molto interessante, per cui rimando al libro di Durrett citato sopra, è la relazione *precisa tra probabilità e teoria delle funzioni armoniche*. (Il libro di Durrett contiene molto di più). La letteratura contemporanea utilizza spesso la relazione che c'è tra funzioni armoniche, loro valori al bordo, moto browniano, martingale discrete, analisi sull'albero.
- Non s'è parlato della *contrattività* del semigrupp di Poisson e del fatto (facile da stabilire utilizzando la trasformata di Fourier) che il segnale approssimante tende al segnale approssimato “in energia”:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|u(\cdot, t) - f\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0.$$