ESERCIZI SULLE DERIVATE 1, con soluzioni

Nicola Arcozzi

(A) Sia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = x\sqrt{x}$. Utilizzando la defizione di derivata, mostrare che esiste $f'(0)$ e che $f'(0) = 0$.

(B) Calcolare il dominio $dom(f)$ e la derivata f' della funzione f, e il dominio $dom(f')$ della derivata di f.

(0) $f(x) = x\log(x)$.

(1) $f(x) = e^{-x^2}$.

(2) $f(x) = \sin(x) - x\cos(x)$.

(3) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$.

(4) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$.

(5) $f(x) = x\sqrt{x}$.

(6) $f(x) = x^x$.

(7) $f(x) = 3x^4 - 3x^3 - 1$.

(8) $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Soluzioni. **(A)** Poichè $f(0) = 0$, $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$, quindi $f'(0) = 0$.

(B)

(0) $f'(x) = \log(x) + 1$, $dom(f) = (0, \infty) = dom(f')$.

(1) $f'(x) = -2xe^{-x^2}$, $dom(f) = \mathbb{R} = dom(f')$.

(2) $f'(x) = x\sin(x)$, $dom(f) = \mathbb{R} = dom(f')$.

(3) $f'(x) = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$, $dom(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty) = dom(f')$.

(4) $f'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}}$, $dom(f) = (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$, $dom(f') = (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$.

(5) $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$, $dom(f) = [0, \infty) = dom(f')$.

(6) utlizzando il fatto che $x^x = \left(e^{\log(x)}\right)^x = e^{x\log(x)}$, calcolo $f'(x) = x^x(\log(x)+1)$, $dom(f) = (0, \infty) = dom(f')$.

(7) $f'(x) = 12x^3 - 9x^2$, $dom(f) = \mathbb{R} = dom(f')$.

(8) $f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, $dom(f) = \mathbb{R} - \{0\} = dom(f')$.