

# ESERCIZI SULLA MONOTONIA DELLE FUNZIONI, con soluzioni

Nicola Arcozzi

**(A)** Trovare gli intervalli di  $\mathbb{R}$  su cui la funzione  $f$  è crescente, quelli su cui  $f$  è decrescente e i punti di minimo e massimo relativo di  $f$ .

(1)  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

(2)  $f(x) = \sin(x) + x, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

(3)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

(4)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

(5)  $f(x) = x \log(x), f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ .

(6)  $f(x) = (x - 1)e^{-x^2}, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

(7)  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

(8)  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

(9)  $f(x) = \cos(x) + \sin(x), f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ . (Per fare questo esercizio è utile trovare i valori di  $x$  per cui  $\sin(x) = \cos(x)$ : utilizzate la circonferenza goniometrica).

(10)  $f(x) = x^x, f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ .

**(B)**. Disegnare un grafico sommario della funzione  $f(x) = x^x, f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Per farlo, oltre a tener conto delle conclusioni di **(A)** (10), occorre calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x, \lim_{x \rightarrow \infty} x^x$$

**Soluzioni.**

**(A)**

- (1)  $f$  è crescente su  $(-\infty, 1]$  e su  $[2, \infty)$ , quindi è decrescente su  $[1, 2]$  e  $x = 1$  è un punto di massimo relativo, mentre  $x = 2$  è un punto di minimo relativo.
- (2)  $f$  cresce su tutto  $\mathbb{R}$ .
- (3)  $f$  cresce su  $[-1, \infty)$ .
- (4)  $f$  cresce su  $[1, \infty)$ .
- (5)  $f$  cresce su  $(e^{-1}, \infty)$ .
- (6)  $f$  cresce su  $[\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}]$ .
- (7)  $f$  cresce su  $(-\infty, 0]$ .
- (8)  $f$  cresce su  $[-1, 1]$ .
- (9)  $f$  cresce su  $[0, \frac{\pi}{4}]$  e su  $[\frac{5}{4}\pi, 2\pi]$ .
- (10)  $f$  cresce su  $(e^{-1}, \infty)$ .

**(B)** I limiti sono

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^x = \infty$$