ESERCIZI SULLA DERIVATA DI COMPOSIZIONI

Nicola Arcozzi, Analisi Matematica L-A

October 21, 2003

(1) Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili su tutto $\mathbb{R}$. Supponiamo che, per ogni x reale, $g(x) = \sin(f(x))$, e che $f(e) = \pi/2$, $f'(e) = \pi$. Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?

(i) $g'(\pi/2) = 0$;

(ii) $g'(\pi/2) = \cos(e)\pi$;

(iii) $g'(e) = 0$;

(iv) $g'(e) = \cos(e)\pi$;

(v) $g'(e) = \pi/2$.

(2) Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili su tutto $\mathbb{R}$. Supponiamo che, per ogni x reale, $g(x) = f(x^2 + e^x)$, e che $f'(e+1) = k$. Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?

(i) $g'(e+1) = k$;

(ii) $g'(e+1) = k(2+e)$;

(iii) $g'(1) = k$;

(iv) $g'(1) = k(2+e)$;

(v) $g'(1) = 2 + e$.

(3) Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili su tutto $\mathbb{R}$. Supponiamo che, per ogni x reale, $g(x) = \cos\left(e^{f(x)}\right)$, e che $f(1) = 2$, $f'(1) = \pi$. Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?

(i) $g'(1) = -\sin(e^2)e^2$;

(ii) $g'(1) = -\pi \sin(e^2)e^2$;

(iii) $g'(e^2) = -\sin(e^2)e^2$;

(iv) $g'(e^2) = -\pi \sin(e^2)e^2$;

(v) $g'(e^2) = -\pi \cos(1)$.

(4) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che, per ogni x reale, $f(2x + \sin(x)) = 3x$.(L'esistenza di una tale funzione non è affatto ovvia). Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera? (Aiuta guardare cosa succede in $x = 0$).

(i) Se f è derivabile in 0, allora $f'(0) = 3$;

(ii) Se f è derivabile in 0, allora $f'(0) = 1$;

(iii) Se f è derivabile in 0, allora $f'(0) = 3/2$;

(iv) Certamente, f non è derivabile in 0.

(5) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che, per ogni x reale, $f(x^3 - 3x^2 + 3x + 1) = e^x$.(L'esistenza di una tale funzione non è affatto ovvia). Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera? (Aiuta guardare cosa succede in $x = 1$).

(i) Se f è derivabile in 2, allora $f'(2) = e$;

(ii) Se f è derivabile in 2, allora $f'(2) = 0$;

(iii) Se f è derivabile in 2, allora $f'(2) = 1$;

(iv) Certamente, f non è derivabile in 2.

Soluzioni. (1) (iii); (2) (iv); (3) (ii); (4) (ii); (5) (iv).