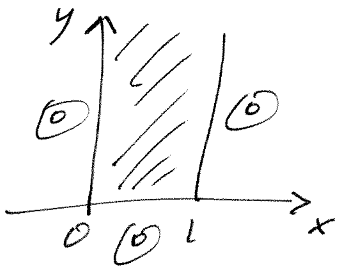
(I) Risolvere il problema

$$
\begin{cases}
(E) & v_{yy}(x,y) - 10\pi \cdot v_y(x,y) - v_{xx}(x,y) = f(y)\cdot \sin(4\pi x) \quad \text{per } 0 \le x \le 1,\ y \ge 0 \\
(CB) & v(0,y) = v(1,y) = 0 \quad \text{per } y \ge 0 \\
(CI) & v(x,0) = 0 = v_y(x,0) \quad \text{per } 0 \le x \le 1
\end{cases}
$$

Soluzione. Le condizioni al bordo sono nulle, quindi omogenee; mentre l'eq. diff. è lineare, ma non omogenea



Mi ispiro alla versione omogenea di (E)+(CB):

$$
\begin{cases}
(E0) & v_{yy} - 10\pi v_y - v_{xx} = 0 \\
(CB0) & v(0,y) = v(1,y) = 0
\end{cases}
$$

che può essere risolta separando le variabili: $v(x,y) = \varphi(x)\cdot\psi(y)$

$$
\begin{cases}
\varphi(x)\,\psi''(y) - 10\pi\cdot\varphi(x)\cdot\psi'(y) - \varphi''(x)\,\psi(y) = 0 \\
\varphi(0)\,\psi(y) = \varphi(1)\,\psi(y) = 0
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\psi''(y) - 10\pi\,\psi'(y)}{\psi(y)} = \dfrac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = K \\
\varphi(0) = \varphi(1) = 0
\end{cases}
$$

$$
(1)\begin{cases}
\varphi''(x) - K\varphi(x) = 0 \\
\varphi(0) = \varphi(1) = 0
\end{cases}
\qquad e \qquad
(2)\begin{cases}
\psi''(y) - 10\pi\,\psi'(y) = K\psi(y)
\end{cases}
$$

Osservo che (1) ha soluzioni non banali

se e solo se $k = -n^2\pi^2$ con $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$;

nel qual caso $\varphi(x) = c \cdot \varphi_n(x)$ con

$$\varphi_n(x) = \sin(n\pi x).$$

Scelgo allora di cercare soluzioni di (E) + (CB) + (CI) della forma:

$$v(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(y) \cdot \sin(n\pi x)$$

con funzioni $c_n = c_n(y)$ da determinare.

Le (CB) sono automaticamente soddisfatte.

Vedo cosa implicano le (CI).

$$(3)\begin{cases} 0 = v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0) \cdot \sin(n\pi x): \\ \Rightarrow c_n(0) = 0 \end{cases}$$

$$(4) \quad 0 = v_y(x,y)\Big|_{y=0} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n'(0) \cdot \sin(n\pi x) \Rightarrow c_n'(0) = 0.$$

Riscrivo (E):

$$(5)\begin{cases} f(y) \cdot \sin(4\pi x) \overset{(E)}{=} v_{yy}(x,y) - 10\pi \cdot v_y(x,y) - v_{xx}(x,y) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} c_n''(y) \cdot \sin(n\pi x) - 10\pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} c_n'(y) \cdot \sin(n\pi x) \\ - \sum_{n=1}^{\infty} c_n(y) \cdot (-n^2 \cdot \pi^2) \cdot \sin(n\pi x) \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n''(y) - 10\pi \cdot c_n'(y) + n^2 \cdot \pi^2 \cdot c_n(y) \right] \cdot \sin(n\pi x) \end{cases}$$

Le ~~con~~ uguaglianze (3), (4), (5) sono soddisfatte se (e solo se):

$$(6)\begin{cases} c_n''(y) - 10\cdot\pi\cdot c_n'(y) + n^2\cdot\pi^2\, c_n(y) = 0 \\ c_n(0) = c_n'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{per } n \geq 1,\ n \neq 4$$

e

$$(7)\begin{cases} c_4''(y) - 10\cdot\pi\cdot c_4'(y) + 16\cdot\pi^2\cdot c_4(y) = f(y) \\ c_4(0) = c_4'(0) = 0 \end{cases}$$

La soluzione di (6) è chiaramente $c_n(y) = 0$ $\forall y \geq 0$.

Risolvo (7) con il metodo delle costanti arbitrarie. Pongo $c_4 = w$ per evitare confusione.

$$(8)\begin{cases} w'' - 10\cdot\pi\cdot w' + 16\cdot\pi^2\cdot w = f(y) \\ w(0) = 0 \\ w'(0) = 0 \end{cases}$$

Considero l'omogenea associata:

$$(9)\quad z'' - 10\cdot\pi\cdot z' + 16\cdot\pi^2\cdot z = 0$$

e l'equazione caratteristica:

$$\lambda^2 - 10\cdot\pi\cdot\lambda + 16\cdot\pi^2 = 0,$$

che ha soluzioni

$$\lambda = 5\pi \pm \sqrt{25\pi^2 - 16\pi^2} = 5\pi \pm 3\pi = 8\pi,\ 2\pi;$$

quindi (9) ha integrale generale:

$$(10)\quad z(y) = A\cdot e^{8\pi y} + B\cdot e^{2\pi y}$$

Cerco soluzioni di (8) della forma:

(11) $w(y) = A(y) \cdot e^{8\pi y} + B(y) \cdot e^{2\pi y}$,

con $A(y)$ e $B(y)$ da determinare.

$$w'(y) = A'(y) \cdot e^{8\pi y} + B'(y) \cdot e^{2\pi y}$$
$$+ 8\pi\, A(y) \cdot e^{8\pi y} + 2\pi\, B(y) \cdot e^{2\pi y}$$

(12) Pongo $A'(y) \cdot e^{8\pi y} + B'(y) \cdot e^{2\pi y} = 0$, quindi:

$$w''(y) = 8\pi \cdot A'(y) \cdot e^{8\pi y} + 2\pi \cdot B'(y) \cdot e^{2\pi y}$$
$$+ 64\pi^2 \cdot A(y) \cdot e^{8\pi y} + 4\pi^2 \cdot B(y) \cdot e^{2\pi y}.$$

Sostituendo in (8) ho che

(13)
$$
\left\{
\begin{aligned}
f(y) &= 8\pi \cdot A'(y) \cdot e^{8\pi y} + 2\pi \cdot B'(y) \cdot e^{2\pi y} \\
&+ 64\pi^2 A(y) \cdot e^{8\pi y} + 4\pi^2 \cdot B(y) \cdot e^{2\pi y} \\
&- 10 \cdot \pi \cdot \left(8\pi \cdot A(y)\, e^{8\pi y} + 2\pi \cdot B(y) \cdot e^{2\pi y} \right) \\
&+ 16\pi^2 \left(A(y) \cdot e^{8\pi y} + B(y) \cdot e^{2\pi y} \right) \\
&= 8\pi \cdot A'(y) \cdot e^{8\pi y} + 2\pi \cdot B'(y) \cdot e^{2\pi y} \\
&+ e^{8\pi y} \cdot A(y) \left[64\pi^2 - 80\pi^2 + 16\pi^2 \right] \\
&+ e^{2\pi y} \cdot B(y) \left[4\pi^2 - 20\pi^2 + 16\pi^2 \right] \\
&= 8\pi \cdot A'(y) \cdot e^{8\pi y} + 2\pi \cdot B'(y) \cdot e^{2\pi y}
\end{aligned}
\right.
$$

Da (12) e (13) ricavo A' e B':

$$\begin{cases} 8\pi \cdot A' \cdot e^{8\pi y} + 2\pi \cdot B' \cdot e^{2\pi y} = f(y) \\ A' \cdot e^{8\pi y} + B' \cdot e^{2\pi y} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 8\pi \cdot e^{8\pi y} & 2\pi \cdot e^{2\pi y} \\ e^{8\pi y} & e^{2\pi y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A'(y) = \frac{\det \begin{pmatrix} f(y) & 2\pi \cdot e^{2\pi y} \\ 0 & e^{2\pi y} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 8\pi \cdot e^{8\pi y} & 2\pi\, e^{2\pi y} \\ e^{8\pi y} & e^{2\pi y} \end{pmatrix}} =$$

$$= \frac{f(y) \cdot e^{2\pi y}}{8\pi \cdot e^{10 \cdot \pi \cdot y} - 2\pi \cdot e^{10 \cdot \pi y}} = \frac{e^{-8\pi y} \cdot f(y)}{6\pi}$$

$$B'(y) = \frac{\det \begin{pmatrix} 8\pi \cdot e^{8\pi y} & f(y) \\ e^{8\pi y} & 0 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 8\pi \cdot e^{8\pi y} & 2\pi \cdot e^{2\pi y} \\ e^{8\pi y} & e^{2\pi y} \end{pmatrix}} = -\frac{e^{-2\pi y} \cdot f(y)}{6\pi}$$

Da cui:

$$A(y) = A(0) + \int_0^y A'(s)\, ds = A(0) + \int_0^y \frac{e^{-8\pi s}}{6\pi} f(s)\, ds$$

$$B(y) = B(0) + \int_0^y B'(s)\, ds = B(0) - \int_0^y \frac{e^{-2\pi s}}{6\pi} f(s)\, ds$$

Quindi:

(14) $$w(y) = \left(A(0) + \int_0^y \frac{e^{-8\pi s}}{6\pi} f(s)\, ds \right) \cdot e^{8\pi y}$$

$$+ \left(B(0) - \int_0^y \frac{e^{-2\pi s}}{6\pi} f(s)\, ds \right) \cdot e^{2\pi y}$$

Prima di imporre le condizioni

$0 = w(0) = w'(0)$, ricordo che

$$w'(y) = 8\pi \cdot A(y) \cdot e^{8\pi y} + 2\pi \cdot B(y) \cdot e^{2\pi y}, \text{ per } (12).$$

Quindi:

$$\begin{cases} 0 = w(0) = A(0) + B(0) \\ 0 = w'(0) = 8\pi \cdot A(0) + 2\pi \cdot B(0) \end{cases}$$

da cui $A(0) = B(0) = 0$.

La soluzione di $(E) + (CB) + (CI)$ è:

$$v(x,y) = \frac{1}{6\pi} \cdot \left(e^{8\pi y} \int_0^y f(s) \cdot e^{-8\pi s} \, ds - e^{2\pi y} \cdot \int_0^y f(s)\, e^{-2\pi s} \, ds \right) \cdot \sin(n\pi x)$$

$$= \frac{1}{6\pi} \int_0^y f(s) \cdot \left[e^{8\pi(y-s)} - e^{2\pi(y-s)} \right] ds \cdot \sin(n\pi x).$$

(II) Risolvere il problema

$$(0)\quad \begin{cases} v_t(x,t) - 2\cdot x t \cdot v_x(x,t) = v(x,t) \; ; \; x \in \mathbb{R}, \; t \geq 0 \\ v(x,0) = e^{-x^2} \end{cases}$$

<u>Soluzione.</u> Cerco le <u>curve caratteristiche</u> $x = x(t)$, quelle per cui

$$(1) \qquad \frac{d}{dt} v(x(t),t) = v_x(x(t),t) + 2 \cdot x(t) \cdot t \cdot v_t(x(t),t).$$

Calcolo: $\frac{d}{dt} v(x(t),t) = v_x(x,t) \cdot \dot{x}(t) + v_t(x,t)$,

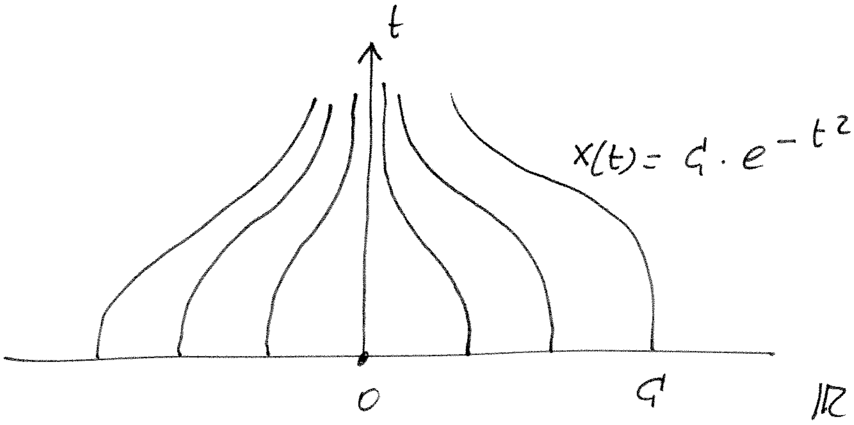
quindi ho le curve di equazione:

$$(2) \qquad \dot{x}(t) = -2\, x(t) \cdot t$$

L'equazione (2) ha le soluzioni

$$(3) \qquad x(t) = c \cdot e^{-t^2}, \quad c \in \mathbb{R},$$

per cui $x(0) = c$:



Pongo $\varphi(t) = v(x(t),t) = v(c \cdot e^{-t^2}, t)$.

Per (0) e (1): $\dot{\varphi}(t) = \varphi(t)$

Per (0) $\varphi(0) = v(x(0), 0) = v(c, 0) = e^{-c^2}$

Risolvo ora:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t) = \varphi(t) \\ \varphi(0) = e^{-c^2} \end{cases}$$

ottenendo:

$$v\left(c\, e^{-t^2}, t\right) = \varphi(t) = e^{-c^2} \cdot e^{t}.$$

Posto $x = c\, e^{-t^2}$, ho $c = x \cdot e^{t^2}$, quindi

$$\boxed{v(x,t) = e^{-x^2 \cdot e^{2t^2}} \cdot e^{t}}$$

che è la soluzione di (0).

<u>OSS.</u> Per $x \neq 0$, $\lim_{t \to +\infty} v(x,t) = 0$,

ma $\lim_{t \to +\infty} v(0,t) = 1$.