Test di prova I

Nicola Arcozzi

26 gennaio 2007

Analisi Matematica L-B

(1) Trovare $Re(z)$, $Im(z)$, $|z|$, $\overline{z}$, $Arg(z)$, dove

$$(i)\ z = -2,\ (ii)\ z = \sqrt{3} - i,\ (iii)\ z = 3i,\ (iv)\ z = 3 + 2i.$$

(2) Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^3 = 1 + i.$$

(3) Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^2 - 2(2+i)z + i = 0.$$

(4) Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$(iz^5 + 2 - 3i)(z^2 - 2iz + 3 - 4i) = 0.$$

(5) Calcolare $a, b \in \mathbb{R}$, dove

$$a + ib = (1-i)^{19}$$

(6) Siano $A \subset \mathbb{R}^2$ e $B \subset \mathbb{R}^2$ gli insiemi

$$A = \{(x,y) :\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\},\ B = \{(x,y) :\ y + x \leq 2\}.$$

Disegnare A, B e $A \cap B$, mettendo in evidenza in punti dove ∂A interseca ∂B.

Soluzioni.

(1) (i) $Re(-2) = -2,\ Im(-2) = 0,\ |-2| = 2,\ \overline{-2} = -2,\ Arg(-2) = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

(ii) $Re(\sqrt{3} - i) = \sqrt{3},\ Im(\sqrt{3} - i) = -1,\ |\sqrt{3} - i| = 2,\ \overline{\sqrt{3} - i} = \sqrt{3} + i,\ Arg(\sqrt{3} - i) = -\arctan(1/\sqrt{3}) + 2k\pi = -\pi/6 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

(iii) $Re(3i) = 0,\ Im(3i) = 3,\ |3i| = 3,\ \overline{3i} = -3i,\ Arg(3i) = \pi/2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

(iv) $Re(3 + 2i) = 3,\ Im(3 + 2i) = 2,\ |3 + 2i| = \sqrt{13},\ \overline{3 + 2i} = 3 - 2i,\ Arg(3 + 2i) = \arctan(2/3) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

(2) $z = \sqrt[6]{2}(\cos(\pi/12 + 2/3 \cdot k\pi) + i \sin(\pi/12 + 2/3 \cdot k\pi)),\ k = 0, 1, 2$ (usate un pó di trigonometria per calcolare esplicitamente le radici).

(3) $z = 2 + i \pm \sqrt[4]{18}(\cos(\pi/8) + i \sin(\pi/8)).$

(4) $z = \sqrt[10]{13}\left(\cos\left(\frac{\arctan(2/3)}{5} + k\frac{2\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{\arctan(2/3)}{5} + k\frac{2\pi}{5}\right)\right),\ k = 0, 1, 2, 3, 4.$

o

$z = i \pm 2\sqrt[4]{2} \cdot (\cos(5\pi/8) - i \sin(5\pi/8)).$

(5) $(1 - i)^{19} = 2^9(-1 + i) = -512 + 512i.$