Test di prova V

Nicola Arcozzi

21 febbraio 2007

Analisi Matematica L-B

(1) Trovare la soluzione massimale del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = e^{x-y}, \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

(2) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + 3y = 2\sin(3x).$$

(3) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una funzione parzialmente derivabile su tutto $\mathbb{R}^2$ e sia $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$h(x, y) = f\left(ye^{x^2+y^2}, -xe^{x^2+y^2}\right).$$

Calcolare $Jh(1,1)$ sapendo che $Jf(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Jf(e^2, -e^2) = \begin{pmatrix} e^{-2} & 0 \\ 0 & e^{-2} \\ e^{-2} & e^{-2} \end{pmatrix}$.

(4) Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$(z^2 - (i+1)z + i)(z^7 + 3 + 3i) = 0.$$

(5) Trovare i punti critici della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = x^3 - 4x^2 - 11x + xy^2 + 5$$

e classificarli.

Soluzioni.

(1) $y(x) = \log(e^x - 1 + e^{-1}), \ x > \log(1 - e^{-1})$.

(2) $\exists A, B \in \mathbb{R} : \ y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ y(x) = A\cos(\sqrt{3}x) + B\sin(\sqrt{3}x) - \frac{1}{4}\sin(3x)$.

(3) $Jh(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(4) $z = 1, i, \ , \ z = \sqrt[14]{18}(\cos(\pi/28 + \pi/7 + 2k\pi/7) + \sin(\pi/28 + \pi/7 + 2k\pi/7)), \ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

(5) I punti critici sono $(0, \sqrt{11}), \ (0, \sqrt{11})$ (punti di sella), $(\frac{11}{3}, 0)$ (punto di minimo relativo) e $(-1, 0)$ (punto di massimo relativo).