Test di prova VII per Analisi Matematica L-B

Nicola Arcozzi

Per la preparazione della prova scritta complessiva e del secondo parziale.

(1) Calcolare $I = \iint_\Omega f(x,y)dxdy$, dove $\Omega = \{(x,y):\ 0 \le x \le 2\pi,\ \cos(x) \le y \le 1\}$ e $f(x,y) = xy$.

(2) Calcolare $I = \iint_\Omega f(x,y)dxdy$, dove $\Omega = \left\{(x,y):\ x^2+y^2 \le 25,\ y \le x \le 0\right\}$ e $f(x,y) = xe^{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}$.

(3) Indicare per quali valori del parametro $a \ge 0$ è convergente l'integrale generalizzato

$$I = \int_0^\infty \frac{x^a \log(1+x^a)}{x^2+x^5} dx.$$

(4) Dire per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_2^\infty \frac{1+n^a}{1+n^{-a}} \frac{1}{\log^2(n)}$$

converge.

(5) Calcolare l'integrale doppio generalizzato

$$I = \int_{\mathbb{R}^2} x^2 e^{-x^2-y^2} dxdy.$$

Soluzioni.

(1) Inizio dello svolgimento:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} x dx \left(\int_{\cos(x)}^1 y dy \right) \\ &= \int_0^{2\pi} x \frac{1}{2} \left(1 - \cos^2(x)\right) dx. \end{aligned}$$

Usare quindi la relazione $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ e un'integrazione per parti.

(2) $I = \int_0^5 r dr \int_{5/4\cdot\pi}^{3/2\cdot\pi} d\theta r^2 \cos(\theta) e^{r^2} = \int_0^5 r^3 e^{r^2} \cdot (-1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$. Calcolo l'integrale nella variabile r per sostituzione e parti:

$$\begin{aligned} \int_0^5 r^3 e^{r^2} &= \frac{1}{2} \int_0^{25} t e^t dt \\ &= \frac{1}{2} \left[t e^t \Big|_0^{25} - \int_0^{25} e^t dt \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[25 e^{25} - (e^{25} - 1) \right] \\ &= 24 e^{25} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Quindi $I = (-1 + \frac{1}{\sqrt{2}}) \cdot (24e^{25} + \frac{1}{2})$.

(3) Sia $f(x) = \frac{x^a \log(1+x^a)}{x^2 + x^5}$, $x \in (0, \infty)$. Allora,

$$f(x) \sim \begin{cases} \frac{1}{x^{2-2a}} & se\ x \to 0, \\ \frac{\log(x)}{x^{5-a}} & se\ x \to \infty. \end{cases}$$

Per confronto con integrali noti, l'integrale generalizzato converge sse $1/2 < a < 4$.

(4) La serie converge per $a \leq -1$.

(5)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty r dr \left(\int_0^{2\pi} r^2 \cos^2(\theta) e^{-r^2} d\theta \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty t e^{-t} dt \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$