ESERCIZI SULLE FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

Nicola Arcozzi

October 30, 2009

(1) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x^3 + 2x^2y + xy^2 - x - 3.$$

- Trovare i punti critici di f e classificarli.
- Trovare lo sviluppo di Taylor al II ordine di f in $(-1, 1)$.
- Determinare l'equazione del *piano tangente* Π al grafico di f nel punto di coordinate $(-1, 1)$ e l'equazione di due rette che giacciono su Π.
- Determinare l'equazione dello *spazio tangente* V al grafico di f nel punto di coordinate $(-1, 1)$ e una base per esso.
- Trovare $\max\{f(x, y) : (x, y) \in A\}$, dove $A = \{(x, y) : xy \geq 1, x+y \leq \frac{5}{2}, y \geq 0\}$.
- Trovare l'equazione della retta tangente all'insieme di livello $L_2 = \{(x, y) : f(x, y) = 2\}$ nel punto $(1, 0)$.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x^4y^2 + x^2y^4 - 4x^2 - 4y^2 - x^2y^2 + 3.$$

- Trovare i punti critici di f e classificarli.

Soluzioni. (1) Punti critici: $(0,1)$, $(0,-1)$, entrambi punti di sella.
Formula di Taylor al II ordine con centro in $(-1,1)$:

$$f(-1+h,1+k) = -2 - h - h^2 - 2hk - k^2 + o_{(h,k)\to(0,0)}(h^2+k^2).$$

Equazione del piano tangente al grafico di f in $(-1,1)$: $z+2=-(x+1)$, su cui giaccio (p.es) le rette (passanti per il punto del grafico $(-1,1,-2)$):

$$\begin{cases} y = 1 \\ z+2 = -(x+1) \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x = -1 \\ z+2 = 0 \end{cases}$$

Equazione dello spazio tangente al grafico di f nel punto $(-1,1)$: $z=-x$.
Una base per esso è data dai vettori $(1,0,-1)$ e $(0,1,0)$.
Differenziale di f in $(-1,1)$: $z = d_{(-1,1)}f(x,y) = -x$.
Il $\max\{f(x,y) : (x,y) \in A\}$ è il massimo tra $15/2$ e $f(x_0,y_0)$ con $x = \sqrt{\frac{\sqrt{13}-1}{2}}$ e $y_0 = 1/x_0$.
L'equazione della retta tangente all'insieme di livello $L_2 = \{(x,y) : f(x,y) = 2\}$ nel punto $(1,0)$ è $y=-(x-1)$.

(2) Punti critici: $(0,0)$ (p.to di max. rel.)

$$P_1 = \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{13}}{2}}, \sqrt{\frac{1+\sqrt{13}}{2}}\right),\ P_2 = \left(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{13}}{2}}, -\sqrt{\frac{1+\sqrt{13}}{2}}\right),$$

e

$$P_3 = \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{13}}{2}}, -\sqrt{\frac{1+\sqrt{13}}{2}}\right),\ P_4 = \left(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{13}}{2}}, \sqrt{\frac{1+\sqrt{13}}{2}}\right)$$

che sono tutti punti di sella. **Soluzioni ancora da controllare.**