[3 punti] Sia $g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ e poniamo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = g\left(x^2 + y^2 + \cos\left(3x + x^2 + 4y + 3y^2 + 1\right), 4x + \sin\left(4x^2 + y + 3y^2 + 1\right)\right) .$$

Sapendo che

$$\mathcal{J}_g(0, 0) = \begin{bmatrix} 0, e \\ e, 0 \end{bmatrix}, \ \mathcal{J}_g(\cos(1), \sin(1)) = \begin{bmatrix} \pi, 0 \\ 0, \pi \end{bmatrix},$$

calcolare $\mathcal{J}_f(0, 0)$.

[4 punti] Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare

$$y'' + 4y = 5\cos(2x) .$$

[4 punti] Risolvere l'equazione in campo complesso

$$\left(z^3 + 1 - \sqrt{11}i\right)\left(z^2 + 5iz - 6\right) = 0$$

[4 punti] Posto

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) = x^3 + 49xy^2 - 16x ,$$

determinare i punti critici di f e classificarli.

[5 punti] Il candidato risolva, in un foglio separato, il seguente esercizio, giustificando adeguatamente le affermazioni fatte. Determinare la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^3(x - 2) , \\ y(2) = 3 . \end{cases}$$