Prova di Analisi Matematica I (31/01/2014)

Nome..Cognome... Matricola.................
Preferisco sostenere la prova orale: inizio appello - fine appello (cancellare quella che non interessa)

Di ogni esercizio che non sia a risposta multipla, riportare i passaggi essenziali che portano alla soluzione.

(1) [5 pti] Calcolare l'integrale:

$$I = \int_0^{\frac{1}{7}} e^{14x} \cdot \frac{\log(2+e^{7x})}{2+e^{7x}} dx$$

sostituzione

$$= \begin{cases} 2+e^{7x} = y \\ dy = 7 \cdot e^{7x}\, dx \\ e^{7x} = y-2 \end{cases} \quad \text{se } x\Big|_0^{1/7} \text{ allora } y\Big|_{2+1=3}^{2+e}$$

uso anche: $e^{14x} = (e^{7x})^2$

sostituzione

$$= \int_3^{2+e} (y-2)\frac{\log y}{y}\frac{dy}{7} = \begin{cases} y = e^t : t = \log y \\ dy = e^t\, dt \\ y\Big|_3^{2+e} \Rightarrow t\Big|_{\log 3}^{\log(2+e)} \end{cases}$$

$$= \int_{\log 3}^{\log(2+e)} (e^t-2)\frac{t}{e^t}\, e^t \frac{dt}{7} = \frac{1}{7}\int_{\log 3}^{\log(2+e)} (e^t-2)\,t\, dt =$$ integro per parti

$$= \frac{1}{7}\Big[(e^t-2t)\,t\Big]_{\log 3}^{\log(2+e)} - \frac{1}{7}\int_{\log 3}^{\log(2+e)} (e^t-2t)\, dt$$

$$= \frac{1}{7}\Big[(e^t-2t)\,t\Big]_{\log 3}^{\log(2+e)} - \frac{1}{7}\Big[e^t - t^2\Big]_{\log 3}^{\log(2+e)}$$

(2) [5 pti] Calcolare il limite

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{\sin(6x)}{6x}} - e^{\cos(6x)}}{x\sin(6x)}.$$

Ha la forma 0/0.

$x \cdot \sin(6x) \underset{x\to 0^+}{\sim} 6x^2$: sviluppo il numeratore al II ordine.

$$\frac{\sin(6x)}{6x} = \frac{1}{6x}\left(6x - \frac{(6x)^3}{3!} + o(x^4)\right) = 1 - \frac{6^2}{3!}x^2 + o(x^2) = 1 - 6x^2 + o(x^2)$$

$$\Rightarrow e^{\frac{\sin(6x)}{6x}} = e^{1-6x^2+o(x^2)} = e \cdot e^{-6x^2+o(x^2)} = e\cdot(1 - 6x^2 + o(x^2))$$

e $$e^{\cos(6x)} = e^{1 - \frac{(6x)^2}{2} + o(x^2)} = e \cdot e^{-18x^2+o(x^2)} = e\cdot(1-18x^2+o(x^2))$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{e^{\frac{\sin(6x)}{6x}} - e^{\cos(6x)}}{x\cdot\sin(6x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{e\cdot(1-6x^2+o(x^2)) - e\cdot(1-18x^2+o(x^2))}{6x^2}$$

$$= \frac{e}{6}\,\frac{1-6x^2-1+18x^2+o(x^2)}{x^2} = 2e\cdot\frac{x^2+o(x^2)}{x^2} = 2e\cdot(1+o(1)) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 2e$$

$$L = 2e$$

(3) [2 pti] Trovare le soluzioni complesse dell'equazione

$$z^6 = -1 - 10i$$

e rappresentarle sul piano complesso.

$$|-1-10i| = \sqrt{1+10^2} = \sqrt{101}$$

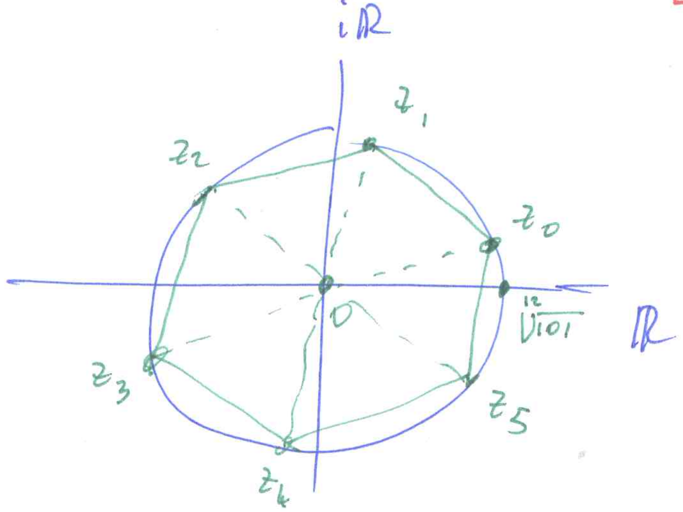
$\mathrm{Re}(-1-10i) = -1 < 0$:

$$-1-10i = \sqrt{101}\cdot e^{i[\operatorname{arctg}(10)+\pi]}$$

$$z_k = \sqrt[12]{101}\cdot e^{i\,\frac{\operatorname{arctg}(10)+\pi+2k\pi}{6}}$$

$$\boxed{= \sqrt[12]{101}\cdot\left[\cos\left(\frac{\operatorname{arctg}(10)+\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\operatorname{arctg}(10)+\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}\right)\right]}$$

$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$



(4) [8 pti] Studiare la funzione

$$f(x) = (|x| - x)\cdot e^{-\frac{|81x^2-1|}{8}}$$

e **tracciarne il grafico.** In particolare, trovare: (i) il dominio *Dominio*(f) di f; (ii) gli intervalli su cui f è continua; (iii) i limiti di f agli estremi di questi intervalli; (iv) la derivata f' di f e il suo dominio; (v) gli intervalli su cui f cresce strettamente, decresce strettamente o è costante; (vi) i punti di massimo e minimo relativo di f (esclusi quelli in intervalli dove f è costante).

Dominio$(f) = \mathbb{R}$ e $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Noto che $x \geq 0 \Rightarrow |x| - x = x - x = 0 \Rightarrow f(x) = 0$: f è costante su $[0, +\infty)$

Lo studio solo per $x \leq 0$, dove $f(x) = -2x \cdot e^{-\frac{|81\cdot x^2 - 1|}{8}}$

$$f'(x) = -2 \cdot e^{-|81\cdot x^2-1|/8} \cdot \left\{1 - x \cdot \operatorname{sgn}(81\cdot x^2 - 1)\cdot \frac{81\cdot 2\cdot x}{8}\right\}$$

$$= \underbrace{-2 \cdot e^{-|81\cdot x^2-1|/8} \cdot \left\{1 - \operatorname{sgn}(81\cdot x^2-1)\cdot \frac{81}{4}x^2\right\}}, \quad x<0$$

per $\underbrace{x \leq 0, \ 81\cdot x^2 - 1 \neq 0}$: Dominio$(f') \supseteq \mathbb{R} \setminus \{0, -1/9\}$ e $\underbrace{f'(x) = 0 \ \forall x > 0}$.

	$-\infty$ … $-2/9$	$-2/9$ … $-1/9$	$-1/9$ … 0	0 … x
$1 - \operatorname{sgn}(81\cdot x^2-1)\cdot\frac{81\cdot x^2}{4} =$	$1 - \frac{81\cdot x^2}{4}$		$1 + \frac{81\cdot x^2}{4}$	$f'(x) = 0$
$1 - \operatorname{sgn}(81\cdot x^2-1)\cdot\frac{81\cdot x^2}{4} > 0$	NO	SI	SI	
$f'(x) \geq 0$	SI	NO	NO	

Ho usato: $\begin{cases} 1 - \frac{81\cdot x^2}{4} \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$ se $-\frac{2}{9} < x < 0$

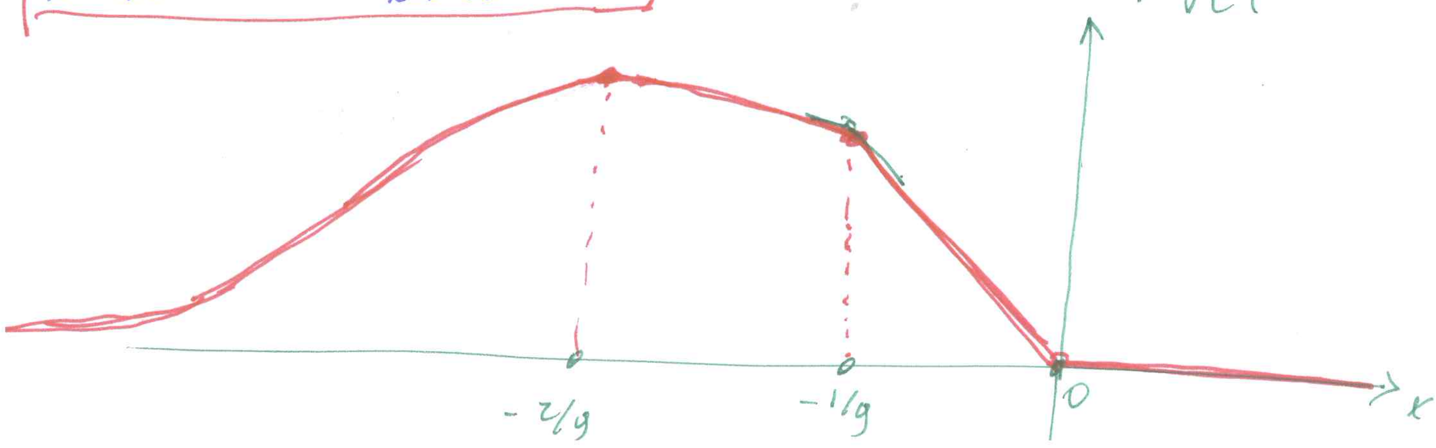
- f cresce su $(-\infty, -2/9]$, decresce su $[-2/9, 0]$, è costante su $[0, +\infty)$
- $x = -2/9$ è un punto di MASSIMO RELATIVO (ed è punto di MASSIMO).

$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$ $\quad \lim_{x \to 0^-} f'(x) = -2e^{-1/8}$: f non è derivabile in $x = 0$.

$\lim_{x \to (-1/9)^-} f'(x) = -2\cdot\left(1 - \frac{1}{4}\right)$ $\quad \lim_{x\to(-1/9)^+} f'(x) = -2\cdot\left(1 + \frac{1}{4}\right)$: f non è derivabile in $x = -1/9$.

$\boxed{\text{Dominio}(f') = \mathbb{R} \setminus \{0, -1/9\}}$ osservo: $f'\left(\left(-\frac{1}{9}\right)^-\right) > f'\left(\left(-\frac{1}{9}\right)^+\right)$.

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \ \text{e} \ \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0}$



(5) **[3 pti]** Sia $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e si supponga che $f(x) \geq 0$ per $x \in [-2,2]$. Sia

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad F : [-2,2] \to \mathbb{R}.$$

Quale delle seguenti affermazioni *non segue necessariamente* dalle iportesi su f?

- ✓ F è crescente su $[-2,2]$.
- F $F(x) \geq 0$ per ogni x in $[-2,2]$.
- ✓ $F(0) = 0$.
- ✓ Esiste x in $[-2,2]$ tale che $F(x) = 1 - x$.

vedi (#)

(6) **[3 pti]** Calcolare il limite di successione

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(n^{5n^2+2n+3}2^{n^3+4n^2+2n+1}\right)}{n^2\log(n)} =$$

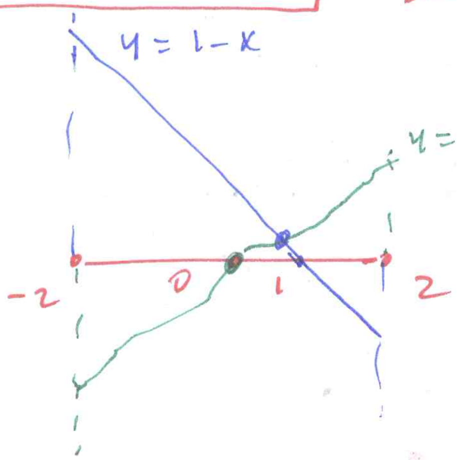
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(5n^2+2n+3)\log n}{n^2\log n} + \frac{(n^3+4n^2+2n+1)\log 2}{n^2\log n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(5 + \underset{n\to\infty}{o(1)} + \frac{n}{\log n}\log 2 + \frac{4\log 2}{\log n} + \underset{n\to\infty}{o(1)}\right)$$

$$= 5 + 0 + \left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\log n}\right)\cdot\log 2 + 0 + 0 = \boxed{+\infty}$$

(#) Uso T.F.C.I.: $F'(x) = f(x) \geq 0$ (per ipotesi) $\forall x \in [-2,2]$.

Quindi $\underline{F \text{ cresce su } [-2,2]}$ e $\underline{F(0) = 0}$.



In generale non sarà vero che $F(x) \geq 0 \ \forall x \in [-2,2]$ (anzi: $F(x) \leq 0 \ \forall x \in [-2,0]$!).

Per il Teo. degli zeri ho che

$$\exists x \in [-2,2] : F(x) = 1 - x$$

(7) [**4 pti**] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e si definisca $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = f(x + f(x + f(x))).$$

Calcolare $h'(x)$ per x in $\mathbb{R}$ e $f'(1)$ sapendo che $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$, $f'(1) = \pi$, $f'(2) = e$, $f'(3) = \sqrt{2}$.

$$h'(x) = f'(x + f(x + f(x))) \cdot (1 + f'(x + f(x))) \cdot (1 + f'(x))$$

$$f(1) = 1 \qquad f(1 + f(1)) = f(2) = 2 \qquad 1 + f(1 + f(1)) = 3$$

$$h'(1) = f'(3) \cdot (1 + f'(2)) \cdot (1 + f'(1)) = \sqrt{2} \cdot (1 + e) \cdot (1 + \pi).$$