Alcuni esercizi sulle equazioni differenziali lineari del II ordine a coefficienti costanti.

(1) Trovare la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 4\dot{x} + 5x = 2 \cdot \cos(t) - 3 \cdot e^{2t} \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

(2) Trovare l'integrale generale di

$$\ddot{x} - 6\dot{x} + 9x = 2 \cdot e^{3t} - e^{-3t}$$

(3) Trovare l'int. gen. di

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = e^{-t} \cdot \sin(2t)$$

(4) Trovare l'int. gen. di

$$\dddot{x} - 3\ddot{x} + 2\dot{x} = 0$$

(5) Trovare la soluzione del problema di Cauchy su $(0, +\infty)$:

$$\begin{cases} \ddot{x} - x = \log(t) \\ x(1) = 0 \\ \dot{x}(1) = 0 \end{cases}$$

(utilizzare ~~i moltiplicatori di Lagrange~~ la variazione delle costanti arbitrarie).

(1) $(PC)\begin{cases} \ddot{x} - 4\dot{x} + 5x = 2\cdot\cos(t) - 3\cdot e^{2t} & (E) \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$ $\Big\}(CI)$

$\ddot{z} - 4\dot{z} + 5z = 0 \quad (E0)$

$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \qquad \frac{\Delta}{4} = 4 - 5 = -1 = i^2 < 0$

$\lambda = 2 \pm i$

$z(t) = c\cdot e^{2t}\cdot\cos(t) + d\cdot e^{2t}\cdot\sin(t)$

$= e^{2t}\cdot[c\cdot\cos(t) + d\cdot\sin(t)]$

Risolvo $\ddot{x} - 4\dot{x} + 5x = 2\cdot\cos(t) \quad (E1)$

Provo con $x(t) = a\cdot\cos(t) + b\cdot\sin(t)$

$\dot{x}(t) = -a\cdot\sin(t) + b\cdot\cos(t)$

$\ddot{x}(t) = -a\cdot\cos(t) - b\cdot\sin(t)$

Sostituisco in (E1):

$2\cdot\cos(t) \stackrel{?}{=} \ddot{x}(t) - 4\dot{x}(t) + 5x(t)$

$= [-a\cdot\cos(t) - b\sin(t)] - 4\cdot[-a\sin(t) + b\cos(t)]$

$+ 5[a\cos(t) + b\sin(t)]$

$= \cos(t)\cdot\{-a - 4b + 5a\} + \sin(t)\cdot\{-b + 4a + 5b\}$

$\iff \begin{cases} 4a - 4b = 2 \\ 4a + 4b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1/4 \\ b = -1/4 \end{cases}$

$x(t) = \frac{1}{4}\cos(t) - \frac{1}{4}\sin(t)$

Risolvo $\ddot{x} - 4\dot{x} + 5x = -3e^{2t}$

Provo con $x(t) = k\cdot e^{2t}$; $\dot{x}(t) = 2k\cdot e^{2t}$; $\ddot{x}(t) = 4k\cdot e^{2t}$

Quindi $(E2) \iff -3e^{2t} = \ddot{x} - 4\dot{x} + 5x$

$= 4k e^{2t} - 4\cdot 2k e^{2t} + 5\cdot k e^{2t} = k\cdot e^{2t}$

$\iff k = -3: \quad x(t) = -3\cdot e^{2t}$

L'integrale generale di (E):

$x(t) = e^{2t}\cdot[c\cdot\cos(t) + d\cdot\sin(t)] + \frac{1}{4}[\cos(t) - \sin(t)] - 3e^{2t}$

Quindi:

$\dot{x}(t) = 2\cdot e^{2t}\cdot[c\cdot\cos(t) + d\cdot\sin(t)]$

$+ e^{2t}\cdot[-c\cdot\sin(t) + d\cdot\cos(t)] - \frac{1}{4}[\sin(t) + \cos(t)] - 6\cdot e^{2t}$

Quindi $(CI) \iff$

$\begin{cases} 1 = x(0) = c + \frac{1}{4} - 3 \\ 0 = \dot{x}(0) = 2c + d - \frac{1}{4} - 6 \end{cases} \quad \begin{cases} c = 15/4 \\ d = -2c + 6 + \frac{1}{4} = -5/4 \end{cases}$

La soluzione di (PC) è:

$$\boxed{x(t) = e^{2t}\left[\frac{15}{4}\cdot\cos(t) - \frac{5}{4}\cdot\sin(t)\right] + \frac{1}{4}[\cos(t) - \sin(t)] - 3e^{2t}}$$

(2) (E) $\ddot{x} - 6\dot{x} + 9x = 2\cdot e^{3t} - e^{-3t}$

(E0) $\ddot{z} - 6\dot{z} + 9z = 0$

$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = 3$: risonanza in (E0)

$z(t) = e^{3t}(c\cdot t + d)$: int. gen. di (E0).

(E1) $\ddot{x} - 6\dot{x} + 9x = 2\cdot e^{3t}$: risonanza perché e^{3t}, te^{3t} sono sol. di (E0).

Provo: $x(t) = k\cdot t^2 e^{3t}$

$\Rightarrow \dot{x}(t) = k\cdot e^{3t}\cdot(2t + 3t^2) \Rightarrow \ddot{x}(t) = k\cdot e^{3t}\cdot(2 + 6t + 6t + 9t^2)$

$= k\cdot e^{3t}\cdot(2 + 12t + 9t^2)$

$(E1) \iff 2\cdot e^{3t} = \ddot{x} - 6\dot{x} + 9x$

$= k\cdot e^{3t}\cdot\{(2 + 12t + 9t^2) - 6\cdot(2t + 3t^2) + 9t^2\}$

$= k\cdot e^{3t}\cdot\{0\cdot t^2 + 0\cdot t + 2\} = 2k\cdot e^{3t} \iff k = 1$:

$x(t) = t^2\cdot e^{3t}$ è sol. di (E1)

$x(t) = -\frac{1}{36}e^{-3t}$ è sol. di (E2) $\ddot{x} - 6\dot{x} + 9x = -e^{-3t}$

$$\boxed{x(t) = e^{3t}(ct + d) + t^2 e^{3t} - \frac{1}{36}e^{-3t} : \text{int. gen. di } (E)}$$

③ (E) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = e^{-t} \cdot \sin(2t)$

(E0) $\ddot{z} + 2\dot{z} + 5z = 0$

$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \qquad \frac{\Delta}{4} = (-1)^2 - 5 = -4 = (2i)^2 < 0$

$\lambda = -1 \pm 2i$

$z(t) = [c \cdot \cos(2t) + d \cdot \sin(2t)] \cdot e^{-t}$

è l'int. gen. di (E0).

Il termine noto di (E) è soluzione di (E0): risonanza.

Provo con:

$x(t) = t \cdot [a \cdot \cos(2t) + b \cdot \sin(2t)] \cdot e^{-t}$

$\dot{x}(t) = [a\cos(2t) + b\sin(2t)]e^{-t}$

$+ t \cdot [-2a\sin(2t) + 2b \cdot \cos(2t)] \cdot e^{-t}$

$- t \cdot [a\cos(2t) + b \cdot \sin(2t)] \cdot e^{-t}$

$= [a\cos(2t) + b\sin(2t)]e^{-t}$

$+ t \cdot [(2b-a)\cos(2t) - (2a+b)\sin(2t)]e^{-t}$

$\ddot{x} = [-2a\sin(2t) + 2b\cos(2t)]e^{-t}$

$- [a\cos(2t) + b\sin(2t)] \cdot e^{-t}$

$+ [(2b-a)\cos(2t) - (2a+b)\sin(2t)]e^{-t}$

$+ t \cdot [-2(2b-a)\sin(2t) - 2(2a+b)\cos(2t)]e^{-t}$

$- t \cdot [(2b-a)\cos(2t) - (2a+b)\sin(2t)]e^{-t}$

$= \{2 \cdot (2b-a)\cos(2t) - 2 \cdot (2a+b) \cdot \sin(2t)\} e^{-t}$

$+ t \cdot \{-[2 \cdot (2a+b) + (2b-a)]\cos(2t)$
$+ [(2a+b) - 2(2b-a)]\sin(2t)\} e^{-t}$

$= \{2 \cdot (2b-a) \cdot \cos(2t) - 2 \cdot (2a+b) \cdot \sin(2t)\} e^{-t}$

$+ t \cdot \{-(3a+4b)\cos(2t) + (4a-3b)\sin(2t)\} \cdot e^{-t}$

$x(t)$ è soluzione $\iff e^{-t} \cdot \sin(2t) = \ddot{x} + 2\dot{x} + 5x$

$= \Big[\{(4b-2a)\cos(2t) - (4a+2b)\sin(2t)\} e^{-t}$
$+ t \cdot \{-(3a+4b)\cos(2t) + (4a-3b)\sin(2t)\} e^{-t}\Big]$

$+ 2 \cdot \Big[\{a\cos(2t) + b\sin(2t)\} \cdot e^{-t}$
$+ t \cdot \{(2b-a)\cos(2t) - (2a+b)\sin(2t)\} e^{-t}\Big]$

$+ 5 \cdot t \cdot \{a\cos(2t) + b\sin(2t)\} \cdot e^{-t}$

$= t \cdot e^{-t} \cdot \{\cos(2t) \cdot [-(3a+4b) + 2 \cdot (2b-a) + 5a]$
$+ \sin(2t) \cdot [+(4a-3b) - 2(2a+b) + 5b]\}$

$+ e^{-t} \cdot \{\cos(2t) \cdot [(4b-2a) + 2a]$
$+ \sin(2t) \cdot [-(4a+2b) + 2b]\}$

$= t \cdot e^{-t} \cdot \{0 \cdot \cos(2t) + 0 \cdot \sin(2t)\}$

$+ e^{-t} \cdot \{4b \cdot \cos(2t) - 4a \cdot \sin(2t)\}$

$\iff \begin{cases} 4b = 0 \\ -4a = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 0 \\ a = -1/4 \end{cases} \iff x(t) = -\frac{1}{4} t \cdot \cos(2t) e^{-t}$:

L'integrale generale di (E) è:

$$\boxed{x(t) = [c \cdot \cos(2t) + d \cdot \sin(2t)] \cdot e^{-t} - \frac{1}{4} t \cdot \cos(2t) e^{-t}}$$

④ (E) $\dddot{x} - 3\ddot{x} + 2\dot{x} = 0$

Posto $\dot{x} = y$: $\quad \ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 0$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \qquad \lambda = 1, 2$

$y(t) = c \cdot e^{t} + d \cdot e^{2t} = \dot{x}(t)$

$\boxed{x(t) = c \cdot e^{t} + \frac{d}{2} e^{2t} + k}$ è l'int. gen. di (E)

(5) (PC) $\begin{cases} \ddot{x} - x = \log(t) & (E) \\ \left.\begin{aligned} x(1) = 0 \\ \dot{x}(1) = 0 \end{aligned}\right\} & (CI) \end{cases}$

$\ddot{z} - z = 0 \qquad (E0)$

$\lambda^2 - 1 = 0 \qquad \lambda = \pm 1,$

$z(t) = c \cdot e^t + d \cdot e^{-t}$: int. gen. di $(E0)$

Cerco $x(t) = c(t)\, e^t + d(t)\, e^{-t}$

$$\dot{x}(t) = \dot{c}(t)\, e^t + \dot{d}(t)\, e^{-t} + c(t)\, e^t - d(t)\, e^{-t}$$
$$= c(t) \cdot e^t - d(t) e^{-t} \text{ se } \boxed{\dot{c}(t)\, e^t + \dot{d}(t)\, e^{-t} = 0}$$

$$\ddot{x}(t) = \dot{c}(t)\, e^t - \dot{d}(t)\, e^{-t} + c(t)\, e^t + d(t)\, e^{-t}$$
$$= c(t)\, e^t + d(t)\, e^{-t} + \log(t) \text{ se } \boxed{\dot{c}(t) e^t - \dot{d}(t) e^{-t} = 0}$$

Con le due richieste,

$$\ddot{x}(t) - x(t) = \left[c(t)\, e^t + d(t)\, e^{-t} + \log(t)\right] - \left[c(t)\, e^t + d(t)\, e^{-t}\right]$$
$$= \log(t) \text{ come volevo.}$$

Risolvo: $\begin{cases} \dot{c}(t)\, e^t + \dot{d}(t)\, e^{-t} = 0 \\ \dot{c}(t)\, e^t - \dot{d}(t)\, e^{-t} = \log(t) \end{cases}$

$\begin{cases} 2 \cdot \dot{c}(t)\, e^t = \log(t) \\ 2 \cdot \dot{d}(t)\, e^{-t} = -\log(t) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{c}(t) = \frac{1}{2} e^{-t} \log(t) \\ \dot{d}(t) = -\frac{1}{2} e^t \log(t) \end{cases}$

$\begin{cases} c(t) = \int_1^t \frac{e^{-s}}{2} \log(s)\, ds \\ d(t) = -\int_1^t \frac{e^s}{2} \log(s)\, ds \end{cases}$ | soddisfano anche: $c(1) = d(1) = 0.$

$$\boxed{x(t) = \frac{e^t}{2} \cdot \int_1^t e^{-s} \log(s)\, ds - \frac{e^{-t}}{2} \int_1^t e^s \log(s)\, ds + c \cdot e^t + d \cdot e^{-t} \text{ è l'int. gen. di } (E).}$$

$$\dot{x}(t) = \frac{e^t}{2} \int_1^t e^{-s} \log(s)\, ds + \cancel{\frac{e^t}{2}} \cdot \cancel{e^{-t}} \log(t) + \frac{e^{-t}}{2} \int_1^t e^s \log(s)\, ds - \cancel{\frac{e^{-t}}{2}}\, \cancel{e^t} \log(t) + c \cdot e^t - d\, e^{-t}$$

Condizioni iniziali:

$\begin{cases} 0 = x(1) = c \cdot e^1 + d \cdot e^{-1} \\ 0 = \dot{x}(1) = c \cdot e^1 - d \cdot e^{-1} \end{cases} \quad \begin{cases} c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$

$$\boxed{x(t) = \frac{e^t}{2} \int_1^t e^{-s} \log(s)\, ds - \frac{e^{-t}}{2} \int_1^t e^s \log(s)\, ds}$$

è la soluzione di (PC).