Equazioni differenziali a variabili separabili.

① $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{t}{x} \\ x(0) = -1 \end{cases}$

② $\begin{cases} \dot{x} = e^{x-t} \\ x(-1) = 0 \end{cases}$

③ $\begin{cases} \dot{x} = \cos(x) \cdot e^{-t^2} \\ x(2) = \pi/2 \end{cases}$

④ $\begin{cases} \dot{x} = tg(x). \\ x(0) = \dfrac{3}{4}\pi \end{cases}$

⑤ Al variare di $k \in \mathbb{R}$, risolvere

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x^2 - 1}{2x} \\ x(0) = k \end{cases} \qquad \text{con } k \in \mathbb{R},\ k \neq 0,$$

e tracciare i grafici delle soluzioni in dei casi significativi.

Soluzioni / Svolgimenti.

(1)

$$\dot{x}(t) \overset{\circ}{=} \frac{t}{x(t)} \iff x(t)\,\dot{x}(t) \overset{\circ}{=} t \iff \underbrace{\int_0^t x(s)\,\dot{x}(s)\,ds}_{= I} \overset{\circ}{=} \int_0^t s\,ds = \left[\frac{s^2}{2}\right]_0^t = \frac{t^2}{2}$$

dove $I = \int_{-1}^{x(t)} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{x(t)} = \frac{x(t)^2}{2} - \frac{1}{2}$

sostituisco

$x = x(s)$

$dx = \dot{x}(s)\,ds$

$s\Big|_0^t \iff x = x(s)\Big|_{x(0)=-1}^{x(t)}$

cioè: $\boxed{\frac{x(t)^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{t^2}{2}}$

da cui $x(t) = \pm\sqrt{1+t^2}$.

Devo decidere il segno: $-1 = x(0) \overset{?}{=} \pm\sqrt{1+0^2}$

$$\boxed{\begin{array}{l} x(t) = -\sqrt{1+t^2} \\ x: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{array}}$$

(2) $\dot{x}(t) = e^{x(t)-t} \overset{\circ}{=} e^{x(t)} \cdot e^{-t}$

$e^{-x(t)}\,\dot{x}(t) \overset{\circ}{=} e^{-t}$

$$\int_{-1}^{t} e^{-x(s)} \cdot \dot{x}(s)\,ds \overset{\circ}{=} \int_{-1}^{t} e^{-s}\,ds = \left(-e^{-s}\right)_{-1}^{t} = -e^{-t} + e$$

$$\| $$

$$\int_{x(-1)=0}^{x(t)} e^{-v}\,dv = \left(-e^{-v}\right)_0^{x(t)} = -e^{-x(t)} + 1$$

cioè, $\boxed{-e^{-x(t)} + 1 = -e^{-t} + e}$

$$e^{-x(t)} = e^{-t} + 1 - e \iff -x(t) = \log\left(e^{-t} + 1 - e\right)$$

dovrò porre $e^{-t} + 1 - e > 0$!

$$\boxed{x(t) = \log\left(e^{-t}+1-e\right)^{-1}}$$

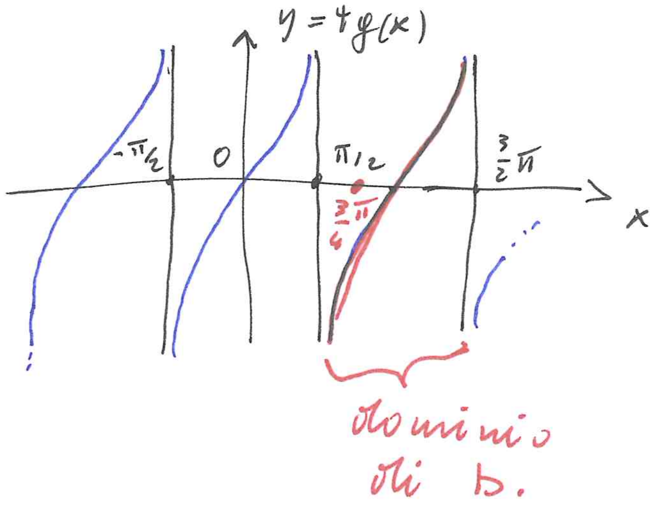
Dominio$(x) = \{ t : e^{-t}+1-e > 0 \}$

$$e^{-t} > e-1 \qquad -t > \log(e-1) \qquad t < \log(e-1)^{-1}$$

Soluzione: $\boxed{\begin{array}{l} x(t) = \log\left(e^{-t}+1-e\right)^{-1} \\ \text{con } \ t \in \left(-\infty, \log(e-1)^{-1}\right) \end{array}}$

(3) osservo che $\cos(x) = 0$ se $x = \pi/2$,
quindi $\boxed{x(t) = \frac{\pi}{2}}$ (costante, $t \in \mathbb{R}$)
è soluzione del P. di C.

(4) Posto $b(x) = tg(x)$, devo decidere quale intervallo sia il suo dominio. Poiché il valore iniziale è $x(0) = \frac{3}{4}\pi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$, ho che considero solo $b = tg : \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right) \to \mathbb{R}$.



$$\dot{x}(t) \overset{\circ}{=} tg(x(t)) \iff 1 \overset{\circ}{=} \frac{\dot{x}(t)}{tg(x(t))} = \frac{\dot{x}(t)\cdot\cos(x(t))}{\sin(x(t))}$$

$$\iff t = \int_0^t 1\, ds \overset{\circ}{=} \int_0^t \dot{x}(s)\frac{\cos(x(s))}{\sin(x(s))}\, ds = \int_{x(0)=\frac{3}{4}\pi}^{x(t)} \frac{\cos(v)}{\sin(v)}\, dv =$$

$y = \sin(v)$
$dy = \cos(v)dv$

$$= \int_{\sin(\frac{3}{4}\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sin(x(t))} \frac{dy}{y} = \left(\log|y|\right)_{1/\sqrt{2}}^{\sin(x(t))}$$

cioè,

$$t = \log|\sin(x(t))| - \log\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|\sin(x(t))| = e^{t+\log 1/\sqrt{2}} = e^t\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

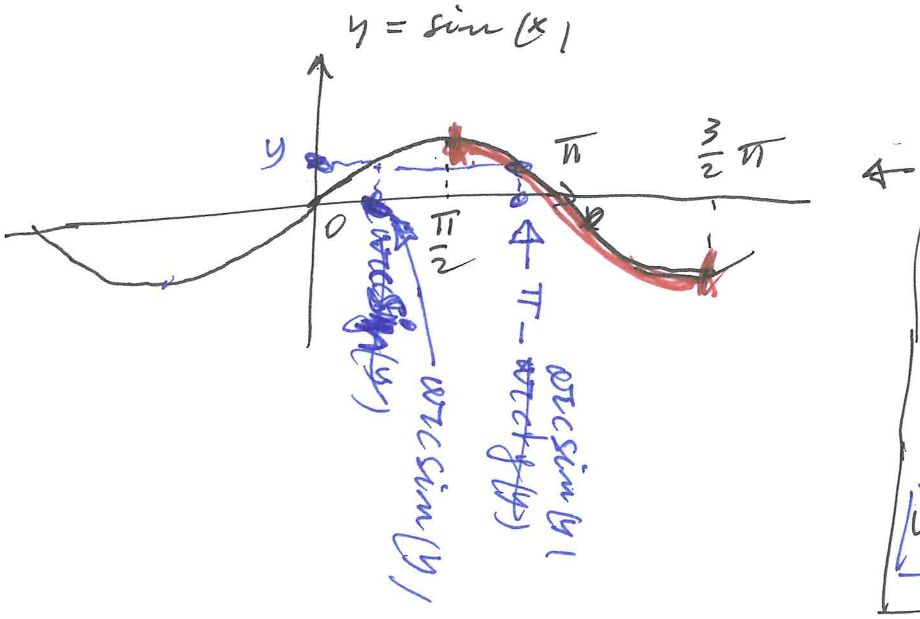
$$\sin(x(t)) = \pm e^t\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Per decidere il segno: $\sin(x(0)) = \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \overset{?}{=} \pm e^0\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\boxed{\sin(x(t)) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^t}$$

Dovrò porre $-1 < \frac{1}{\sqrt{2}}e^t < 1$

Devo ora ricavare $x(t)$ sapendo che $x(t) \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$:



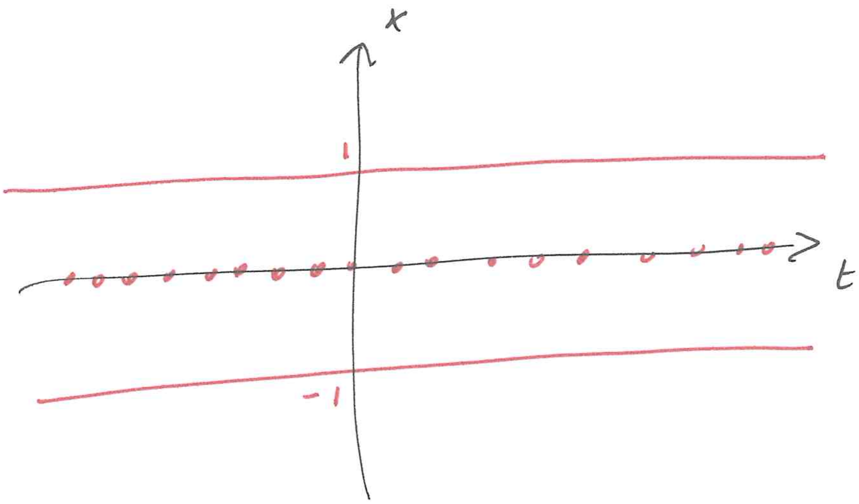
La funzione $\varphi: [-1,1] \to \mathbb{R}$ tale che
(A) $\sin(\varphi(y)) = y$
(B) $\frac{\pi}{2} \leq \varphi(y) \leq \frac{3}{2}\pi$
è

$$\boxed{\varphi(y) = \pi - \arcsin(y)}$$

Quindi

$$\boxed{\begin{gathered} x(t) = \pi - \arcsin\left(\frac{e^t}{\sqrt{2}}\right) \\ \text{Dominio}(x) = (-\infty, \log(\sqrt{2})) \end{gathered}}$$

(3) Chiaramente non abbiamo soluzioni (il problema non ha senso) se $k=0$.
Abbiamo le soluzioni costanti $x(t)=\pm 1$.



Posto $k \neq \pm 1, 0$, risolviamo come al solito.

$$\dot x = \frac{x^2-1}{2x} \quad \text{sse} \quad \frac{2x\cdot\dot x}{x^2-1} = 1$$

$$\text{sse} \quad t = \int_0^t 1\cdot ds = \int_0^t \frac{2x(s)\dot x(s)\,ds}{x(s)^2-1} = \int_{x(0)=k}^{x(t)} \frac{2x\,dx}{x^2-1} = \int_{x(0)^2=k^2}^{x(t)^2} \frac{dy}{y-1}$$

$$= \left(\log|y-1|\right)_{k^2}^{x(t)^2} = \log|x(t)^2-1| - \log|k^2-1|$$

cioè,
$$\log|x(t)^2-1| = t + \log|k^2-1|$$
$$|x(t)^2-1| = e^t\cdot|k^2-1|$$
$$x(t)^2-1 = \pm e^t(k^2-1):$$ sostituendo $t=0$:
$$k^2-1 = x(0)^2-1 = + e^0\cdot(k^2-1)$$

$$x(t)^2-1 = e^t(k^2-1)$$
$$x(t)^2 = e^t(k^2-1)+1$$
$$x(t) = \pm\sqrt{e^t(k^2-1)+1} \quad : \quad k = x(0) = \pm\sqrt{k^2}:$$

$$\boxed{x(t) = \sqrt{e^t(k^2-1)+1} \quad \text{se } k>0}$$
$$\boxed{x(t) = -\sqrt{e^t(k^2-1)+1} \quad \text{se } k>0}$$

Dominio.

$$e^t(k^2-1)+1>0$$

$e^t > -\frac{1}{k^2-1}$ se $\lvert k\rvert>1$, che è sempre verificata	
$e^t < -\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{1-k^2}$ se $\lvert k\rvert<1$	

Le soluzioni avranno un aspetto diverso nei 4 casi: $k<-1$; $-1<k<0$; $0<k<1$; $1<k$