## Alcuni esercizi sulle equazioni differenziali ordinarie (2014, Nicola Arcozzi)

**(A) Domande di tipo vero/falso.** Siano $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue e, per ogni funzione $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ si definisca $L\varphi \in C(\mathbb{R})$,

$$L\varphi(t) = \ddot{\varphi}(t) + a(t)\dot{\varphi}(t) + b(t)\varphi(t).$$

Quali delle seguenti affermazioni seguono necessariamente dalle ipotesi?

(1) Se $f, g \in C^2(\mathbb{R})$, allora $L(f + g) = L(f) + L(g)$.

(2) Se $f, g \in C^2(\mathbb{R})$, allora $L(f \cdot g) = L(f) \cdot L(g)$.

(3) Se $f \in C^2(\mathbb{R})$ e $k \in \mathbb{R}$, allora $L(kf) = kL(g)$.

(4) Esiste $f \in C^2(\mathbb{R})$: $Lf = 0$ (cioè, $Lf(t) = 0$ per ogni $t$ in $\mathbb{R}$).

(5) Esiste $f \in C^2(\mathbb{R})$: $Lf = 0$ e $f$ non è identicamente nulla.

(6) Esistono $f, g \in C^2(\mathbb{R})$: $Lf = Lg = 0$, con $f$ e $g$ linearmente indipendenti.

(7) Esistono $f, g, h \in C^2(\mathbb{R})$: $Lf = Lg = Lh = 0$, con $f$, $g$ e $h$ linearmente indipendenti.

(8) Se $Lf = 0$, $f(1) = 0$ e $\dot{f}(1) = 0$, allora $f(t) = 0$ per ogni $t$ in $\mathbb{R}$.

(9) Comunque si scelgano $a, b$, la funzione $\varphi(t) = t^2$ non è soluzione dell'equazione differenziale:

$$(ELO)\ \ddot{x}(t) + a(t)\dot{x}(t) + b(t)x(t) = 0$$

(10) Comunque si scelgano $a, b$, la funzione $\varphi(t) = t$ non è soluzione dell'equazione differenziale (ELO) del punto (9).

(11) Il problema

$$\begin{cases} (ELO)\ \ddot{x}(t) + a(t)\dot{x}(t) + b(t)x(t) = 0 \\ (CI)\ x(0) = 1 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione in $C^2(\mathbb{R})$.

(12) Il problema

$$\begin{cases} (ELO)\ \ddot{x}(t) + a(t)\dot{x}(t) + b(t)x(t) = 0 \\ (CI0)\ x(0) = 1 \\ (CI1)\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione in $C^2(\mathbb{R})$.

(13) Il nucleo Ker$L$ di $L$ ha dimensione 2.

(14) Ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di $L$. Cioè, esiste $\varphi_\lambda \in C^2(\mathbb{R})$, $\varphi$ non identicamente nulla, tale che

$$L\varphi = \lambda\varphi.$$

(15) Si consideri la mappa $\Lambda : \mathbb{R}^2 \to C^2(\mathbb{R})$ così definita. Dato $(x_0, y_0)$ in $\mathbb{R}^2$, sia $\Lambda(x_0, y_0)$ l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$(PC)\quad \begin{cases} (ELO)\ \ddot{x}(t) + a(t)\dot{x}(t) + b(t)x(t) = 0 \\ (CI)\ x(0) = x_0 \\ (CI1)\ \dot{x}(0) = y_0. \end{cases}$$

Allora $\Lambda$ è lineare: $\Lambda(k_0(x_0, y_0) + k_1(x_1, y_1)) = k_0\Lambda((x_0, y_0) + k_1\Lambda((x_1, y_1))$.

(16) La mappa $\Lambda$ del punto (15) è iniettiva.

(17) La mappa $\Lambda$ del punto (15) è suriettiva.

(18) La dimensione di $\Lambda(\mathbb{R}^2) \subseteq C^2(\mathbb{R})$ è '2.

(19) Sia $f$ un'altra funzione in $C^2(\mathbb{R})$. Si consideri la mappa $\Phi : \mathbb{R}^2 \to C^2(\mathbb{R})$ così definita. Dato $(x_0, y_0)$ in $\mathbb{R}^2$, sia $\Lambda(x_0, y_0)$ l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$(PC) \quad \begin{cases} (EL)\ \ddot{x}(t) + a(t)\dot{x}(t) + b(t)x(t) = f(t) \\ (CI)\ x(0) = x_0 \\ (CI1)\ \dot{x}(0) = y_0. \end{cases}$$

Allora $\Phi$ è lineare: $\Lambda(k_0(x_0, y_0) + k_1(x_1, y_1)) = k_0\Lambda((x_0, y_0) + k_1\Lambda((x_1, y_1))$.

(20) La mappa $\Phi$ del punto (19) è iniettiva.

(21) La mappa $\Phi$ del punto (19) è suriettiva.

(22) $\Phi((x_0, y_0)) + \Lambda((x_1, y_1)) = \Phi(x_0 + x_1, y_0 + y_1)$.

**(B) Alcune equazioni differenziali lineari del I ordine.** Se gli integrali non vanno calcolati, viene specificato nel testo dell'esercizio.

(1) Trovare l'integrale generale di
$$\dot{x} + tx = e^{-\frac{t^2}{2}}t.$$

(2) Trovare la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} \dot{x} + \sin(t)x = e^{\cos(t)}\cos(t)\sin(t), \\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{-1}. \end{cases}$$

(3) Utilizzando se si vuole la soluzione dell'esercizio (1), trovare l'integrale generale di
$$\dot{x} + tx = 0.$$

(4) Trovare l'integrale generale[1] di
$$\ddot{x} - \dot{x} = t.$$

(5) Sia $f \in C(\mathbb{R})$. Scrivere l'integrale generale dell'equazione
$$(1+t^2)\dot{x} + x = f(t).$$
(Chiaramente, vi sarà qualche funzione integrale da lasciare così com'è.)

(6) Con $f$ come nell'esercizio (5), trovare la soluzione di
$$\begin{cases} (1+t^2)\dot{x} + x = f(t), \\ x(1) = 0. \end{cases}$$

(7) Trovare l'integrale generale di
$$\frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}\left(e^t x\right) + e^t x\right] = 1.$$
Vedi nota a (4).

**Soluzioni dell'esercizio (A).** (1) v; (2) f; (3) v; (4) v; (5) v; (6) v; (7) f; (8) v; (9) v; (10) f; (11) f; (12) v; (13) v; (14) v; (15) v; (16) v; (17) f; (18) v; (19) f; (20) v; (21) f; (22) v. Lo svolgimento dettagliato di alcune delle domande verrà fatto su un diverso file.
**Le soluzioni dell'esercizio (B) sono su un diverso file.**

[1] Si tratta di un'equazione lineare del II ordine, ma chiaramente riconducibile a una del I. Però, attenzione: la soluzione deve avere **due** gradi di libertà.