I prova parziale di Analisi Matematica TB (30/04/2014)

Nome .... Cognome .... Matricola ....

(1) [14 pt.]Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1\right)(y^2 - 4).$$

- Calcolare $\nabla f(x,y)$ e $Hessf(x,y)$.
- Calcolare in $(x,y) = (0,3)$: la formula di Taylor al II ordine per f; il differenziale di f; l'equazione dello spazio tangente al grafico di f; l'equazione del piano tangente al grafico di f.
- Trovare i punti critici di f.
- Classificare i punti critici di f.

$$\partial_x f(x,y) = \frac{2x}{4}(y^2-4) \qquad \partial_y f(x,y) = \frac{2y}{9}(y^2-4) + 2y\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1\right)$$

$$= 2y\left[\frac{1}{9}(y^2-4) + \left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1\right)\right]$$

$$= 2y\cdot\left(\frac{2}{9}y^2 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{13}{9}\right)$$

$$Hess f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{2}{4}(y^2-4) & xy \\ xy & 2\left(\frac{2}{9}y^2+\frac{1}{4}x^2-\frac{13}{9}\right)+\frac{8}{9}y^2 \end{bmatrix}$$

$$f(0,3) = 0 \qquad \nabla f(0,3) = \left(0, \frac{10}{3}\right) \qquad Hess f(0,3) = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 2\cdot\frac{5}{9}+\frac{72}{9}=\frac{82}{9} \end{bmatrix}$$

TAYLOR $f(h, 3+k) = 0 + \left(0, \frac{10}{3}\right)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot(h,k)\begin{pmatrix} 5/2 & 0 \\ 0 & 82/9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \underset{(h,k)\to(0,0)}{o(h^2+k^2)}$

$= \frac{10}{3}k + \frac{5}{4}h^2 + \frac{41}{9}k^2 + \underset{(h,k)\to(0,0)}{o(h^2+k^2)}$

DIFF. $df(0,3)(h,k) = \frac{10}{3}k$

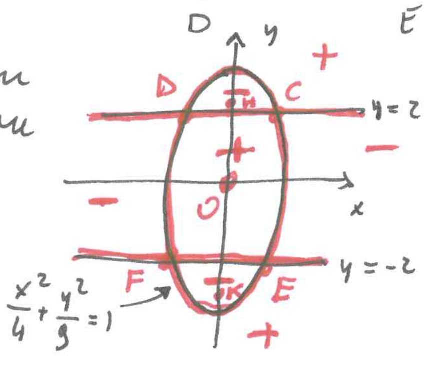
spazio tangente: $z = \frac{10}{3}y$; piano tangente: $z = \frac{10}{3}(y-3)$

Punti critici: $\begin{cases} x\cdot(y^2-4) = 0 \\ 2y\cdot\left[\frac{1}{9}(y^2-4) + \left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1\right)\right] = 0 \end{cases}$ cioè, (A) o (B):

(A) $\begin{cases} y = \pm 2 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{4}{9} - 1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = \pm 2 \\ x = \pm\sqrt{\frac{20}{9}} = \pm\frac{2}{3}\sqrt{5} \end{cases}$ o (B) $\begin{cases} x = 0 \\ y\cdot\left(\frac{2}{9}y^2 - \frac{13}{9}\right) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y=0,\ y = \pm\sqrt{\frac{13}{2}} \end{cases}$

Punti critici: $\underset{C}{\left(2, \tfrac{2}{3}\sqrt{5}\right)}$, $\underset{D}{\left(-2, \tfrac{2}{3}\sqrt{5}\right)}$, $\underset{E}{\left(2, -\tfrac{2}{3}\sqrt{5}\right)}$, $\underset{F}{\left(-2, -\tfrac{2}{3}\sqrt{5}\right)}$, $\underset{O}{(0,0)}$, $\underset{G}{\left(0, \sqrt{\tfrac{13}{2}}\right)}$, $\underset{K}{\left(0, -\sqrt{\tfrac{13}{2}}\right)}$

Per la classificazione mi basta considerare il segno di f, più i Teo. di Fermat e Weierstrass.



$\boxed{\begin{array}{l} C,D,E,F:\ \text{punti di sella} \\ O:\ \text{p.to max. rel.} \\ G,K:\ \text{p.ti min. rel.} \end{array}}$

(2) **[4 pt.]** Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ di

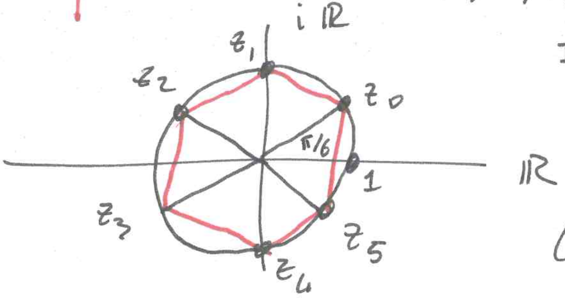
$$(z^3+3)^2 - 6(z^3+3) + 10 = 0.$$

$$0 = z^6 + 6z^3 + 9 - 6z^3 - 18 + 10 = z^6 + 1$$

$$z^6 = -1 = 1 \cdot e^{i\pi}$$

$$z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{6}\right)} = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right)$$

con $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$



Indicando gli z_k nel piano complesso, vedo che le soluz. sono $\boxed{z = \pm i;\ z = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2}}$

(In molte versioni questa seconda scrittura è impossibile calcolarla).

(3) **[8 pt.]** Trovare la soluzione $x = x(t)$ del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{t}{x} e^{\frac{x^2}{81} - \frac{t^2}{100}}, \\ x(0) = -8. \end{cases}$$

Determinare il dominio di $x = x(t)$.

$$\dot{x} = \frac{t}{x} \cdot e^{\frac{x^2}{81}} \cdot e^{-\frac{t^2}{100}}$$

$$x \cdot \dot{x} \cdot e^{-\frac{x^2}{81}} = t \cdot e^{-\frac{t^2}{100}}$$

$$\int_0^t s \cdot e^{-\frac{s^2}{100}}\, ds = \int_0^t x(s)\, e^{-\frac{x(s)^2}{81}}\, \dot{x}(s)\, ds \overset{x = x(s)}{=} \int_{x(0)=-8}^{x(t)} x \cdot e^{-\frac{x^2}{81}}\, dx$$

$$\boxed{\begin{aligned} v &= s^2/100 \\ dv &= 2s/100\, ds \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} v &= \frac{x^2}{81} \\ dv &= \frac{2x}{81}\, dx \end{aligned}}$$

$$\int_0^{t^2/100} e^{-v} \cdot 50\, dv = 50\left(-e^{-v}\right)_0^{t^2/100} = 50\left(1 - e^{-t^2/100}\right)$$

$$\int_{64/81}^{x(t)^2/81} e^{-v} \cdot \frac{81}{2}\, dv = \frac{81}{2}\left(-e^{-v}\right)_{64/81}^{x(t)^2/81} = \frac{81}{2} \cdot \left(e^{-64/81} - e^{-x(t)^2/81}\right)$$

Quindi abbiamo

$$\Rightarrow e^{-64/81} - e^{-x(t)^2/81} = \frac{100}{81}\left(1 - e^{-t^2/100}\right)$$

$$\Rightarrow e^{-x(t)^2/81} = -\frac{100}{81}\left(1 - e^{-t^2/100}\right) + e^{-64/81}$$

$$\Rightarrow -\frac{x(t)^2}{81} = \log\left(e^{-64/81} - \frac{100}{81}\left(1 - e^{-t^2/100}\right)\right)$$

(*) : le uso dopo per il dominio

$$\Rightarrow x(t) \overset{?}{=} \pm 9 \cdot \left[\log\left(e^{-64/81} - \frac{100}{81}\left(1 - e^{-t^2/100}\right)\right)^{-1}\right]^{1/2}$$

$$8 = x(0) \overset{?}{=} \pm 9 \left(\log\left(e^{-64/81}\right)^{-1}\right)^{1/2} = \pm 9 \sqrt{\frac{64}{81}} = \pm 9 \cdot \frac{8}{9} = \pm 8 \longrightarrow (*)$$

(4) **[4/-1 pt.]**Siano $a, b, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, con $f \neq 0$, e si considerino le equazioni differenziali

$$(E)\quad \ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = f(t)$$

e

$$(EO)\quad \ddot{z} + a(t)\dot{z} + b(t)z = 0.$$

Quale delle seguenti affermazioni segue *necessariamente* dalle ipotesi?

- Se x_1 e x_2 sono soluzioni di (E), allora $x_1 + x_2$ è soluzione di (E).
- X (E) ha almeno tre soluzioni linearmente indipendenti.
- (EO) ha esattamente due soluzioni in $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- (E) non ha più di due soluzioni linearmente indipendenti.

Vedi test di prova dove questo V/F è svolto in altro foglio

(#1) → Scelgo il segno (−):

$$\boxed{x(t) = -9\cdot\sqrt{\log\left(e^{-64/81} - \frac{100}{81}\left(1 - e^{-t^2/100}\right)\right)^{-1}}}$$

Dominio: tornando alle relazioni (C):

$$e^{-x(t)^2/81} = \underbrace{\underbrace{-\frac{100}{81}\left(1 - e^{-t^2/100}\right)}_{\text{è negativo}} + \underbrace{e^{-64/81}}_{\text{è minore di 1}}}_{\text{è minore di 1}}$$

osservo che:

quindi che:

Ora, affinché $e^{-x^2/81} = A$ abbia una soluzione $x \in \mathbb{R}$,

è necessario e suff. che $0 < A \leq 1$ ← già verificato $\forall t \in \mathbb{R}$

lo verifico adesso

$$e^{-64/81} > \frac{100}{81}\left(1 - e^{-t^2/100}\right) \qquad \cancel{\frac{100}{81} - e^{-64/81} < e^{-}}$$

$$e^{-t^2/100} > -\frac{81}{100}e^{-\frac{64}{81}} + 1 \qquad -\frac{t^2}{100} > \log\left(1 - \frac{81}{100}\cdot e^{-\frac{64}{81}}\right)$$

$$t^2 < 100\cdot\log\left(\frac{1}{1 - \frac{81}{100}\cdot e^{-\frac{64}{81}}}\right)$$

Dominio: $-10\cdot\sqrt{\log\left(\frac{1}{1 - \frac{81}{100}\cdot e^{-\frac{64}{81}}}\right)} < t < 10\cdot\sqrt{\log\left(\frac{1}{1 - \frac{81}{100}\cdot e^{-\frac{64}{81}}}\right)}$