Correzioni Test
14/03/2014

(1) $\boxed{z = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{39}}{2}}$

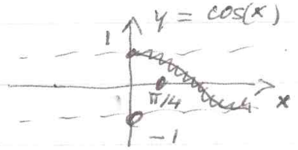
o $z = \sqrt[5]{\frac{3\cdot\sqrt{5}\,\sqrt{34}^4}{\sqrt{13}}} \cdot e^{\frac{i}{5}\left(\pi + \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi + 4\left(\arctan\left(\frac{3}{5}\right)+\pi\right) - \arctan(-3/2) + 2k\pi\right)}$ $\quad k = 0,1,2,3,4$

$= \sqrt[5]{3\cdot 34^2}\cdot\sqrt[10]{\frac{5}{13}}\cdot e^{\frac{i}{5}\left(4\arctan\left(\frac{3}{5}\right) + \arctan\left(\frac{3}{2}\right) - \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + (2k+6)\pi\right)}$

$\boxed{= \sqrt[5]{3\cdot 34^2}\cdot\sqrt[10]{\frac{5}{13}}\cdot\left[\cos(\alpha_k) + i\sin(\alpha_k)\right] \text{ con } \alpha_k = \left(4\arctan\left(\frac{3}{5}\right) + \arctan\left(\frac{3}{2}\right) - \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + (2k+6)\pi\right)\frac{1}{5} \text{ e } k = 0,1,2,3,4}$

(2) $\frac{t^3}{3} = \int_0^t s^2\,ds = \int_0^t \frac{\sin(x(s))}{\cos^2(x(s))}\dot{x}(s)\,ds = \int_{x(0)=\pi/4}^{x(t)} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}\,dx = \left[\frac{1}{\cos(x)}\right]_{\pi/4}^{x(t)} = \frac{1}{\cos(x(t))} - \frac{1}{\cos(\pi/4)} = \frac{1}{\cos(x(t))} - \sqrt{2}$

$\Rightarrow \cos(x(t)) = \left(\frac{t^3}{3} + \sqrt{2}\right)^{-1}$



$\boxed{x(t) = \arccos\left(\frac{1}{\frac{t^3}{3} + \sqrt{2}}\right)}$

Dominio(x) $\subseteq$
$= \left\{t : -1 < \frac{1}{\frac{t^3}{3}+\sqrt{2}} < 1\right\}$

$= \left\{t : \frac{t^3}{3} + \sqrt{2} > 1 \text{ oppure } -1 < \frac{t^3}{3} + \sqrt{2} < 0\right\} = \left\{t : t > -\sqrt[3]{3\cdot(\sqrt{2}-1)} \text{ oppure } -\sqrt[3]{3(\sqrt{2}+1)} < t < -\sqrt[3]{3\sqrt{2}}\right\}$

$-\sqrt[3]{3(\sqrt{2}+1)} \qquad -\sqrt[3]{\sqrt{2}\cdot 3} \qquad -\sqrt[3]{3(\sqrt{2}-1)} \qquad 0$

Ma Dominio(x) è un intervallo contenente $t = 0$:

$\boxed{\text{Dominio}(x) = \left(-\sqrt[3]{3\cdot(\sqrt{2}-1)}\ ;\ +\infty\right)}$

(3) (i) F (ii) F (e nuno che non sia $f = 0$?) (iii) V: sostituendo ho $1 + t^2 = t\cdot f(t) \Rightarrow 1 + 0^2 = 0\cdot f(0)$, assurdo (iv) V:

$\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)^{\cdot\cdot} + \left(\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)^{\cdot} + t\cdot\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\ddot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_1 + t\varphi_1\right) + \frac{1}{2}\left(\ddot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2 + t\varphi_2\right) = \frac{1}{2}tf(t) + \frac{1}{2}tf(t) = tf(t)$

(4) $tx = y$: $\dot{y} + ty = t \Leftrightarrow \dot{y}e^{t^2/2} + te^{t^2/2}y = te^{t^2/2} \Leftrightarrow \left(ye^{t^2/2}\right)^{\cdot} = \left(e^{t^2/2}\right)^{\cdot} \Leftrightarrow tx(t) = y(t) = e^{-t^2/2}\left(e^{t^2/2} + K\right)$

$\Leftrightarrow \boxed{x(t) = \frac{1}{t} + K\cdot\frac{e^{-t^2/2}}{t} \quad \text{con } t \in (0, +\infty)}$

Test di prova 21/03/2014

① Trovare l'integrale generale di

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 10x = 3t + 5 \cdot e^{t} \cdot \cos(3t)$$

② Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$(z^2 + 2z + 10) \cdot (i - z^3) = 0$$

③ Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \frac{xy}{2x^2 + 3y^2 + 1}$$

Calcolare $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

Trovare $a, b \in \mathbb{R}$:

$$f(1+h, 2+k) = \frac{2}{15} + ah + bk + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right) \quad (h,k) \to (0,0) \text{ in } \mathbb{R}^2$$

④ Siano $a \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ e $x, y \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ due soluzioni di $\ddot{z} + a(t)\dot{z} - z = 0$

Mostrare che se $x(t)y(t) = 1 \ \forall t \in \mathbb{R}$ allora $\dot{x}(t)\dot{y}(t) = -1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

(FACOLTATIVO)

⑤ Siano $a, b \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ e siano x_1 e $x_2 \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$

soluzioni di $\ddot{x}_1 + a(t)\dot{x}_1 + b(t)x_1 = k \qquad (E1)$

e di $\ddot{x}_2 + a(t)\dot{x}_2 + b(t)x_2 = h$

con $k, h \in \mathbb{R}$, $k \neq 0 \neq h$.

Quale delle seguenti affermazioni non segue dalle ipotesi?

(i) $z = hx_1 - kx_2$ è sol. di $\ddot{z} + a(t)\dot{z} + b(t)z = 0$

(ii) $h \cdot x_1(t) = k \cdot x_2(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$

(iii) $w = \frac{kx_1 + hx_2}{k^2 + h^2}$ è sol. di $\ddot{w} + a(t)\dot{w} + b(t)w = 1$

(iv) esistono infinite x_1 soluzioni di (E1) tali che $x_1(0) = 0$.