Test di prova per Analisi Matematica TB (28/03/2014)

(1) Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = y(y-1)(x^2 - y - 1).$$

- Calcolare $\nabla(x, y)$.
- Calcolare in $(x, y) = (\sqrt{2}, 1)$: la "formula di Taylor al I ordine per f; il differenziale di f; l'equazione dello spazio tangente al grafico di f; l'equazione del piano tangente al grafico di f.
- Sia $v = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$: calcolare $D_v f(\sqrt{2}, 1)$.
- Trovare i punti critici di f.
- Disegnare sul piano (x, y): l'insieme degli (x, y) su cui $f(x, y) = 0$, quello su cui $f(x, y) > 0$, quello su cui $f(x, y) < 0$.
- Classificare i punti critici di f.

(2) Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ di

$$z^{10} - 10z^5 + 29 = 0.$$

(3) Trovare la soluzione $x = x(t)$ del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{t}{\cos(x)} \\ x(0) = \frac{\pi}{4} - (2k+1)\pi, \end{cases}$$

dove $k \geq 0$ è il primo numero intero che vedete dopo aver letto il testo dell'esercizio. Trovate il dominio di x.

P.S. Provate anche con il leggermento più brigoso

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{t}{\sin(x)\cos(x)} \\ x(0) = \frac{\pi}{4} - (2k+1)\pi, \end{cases}$$

(4) Siano $a, b, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, con $f \neq 0$, e si considerino le equazioni differenziali

$$(E) \quad \ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = f(t)$$

e

$$(EO) \quad \ddot{z} + a(t)\dot{z} + b(t)z = 0.$$

Qual*e* delle seguenti affermazioni segue *necessariamente* dalle ipotesi?

- (EO) ha esattamente due soluzioni in $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Se x_1 e x_2 sono soluzioni di (E), allora $x_1 + x_2$ è soluzione di (E).
- (E) ha almeno tre soluzioni linearmente indipendenti.
- (E) non ha più di due soluzioni linearmente indipendenti.

Soluzioni 21/03/2014

(1) $\ddot z + 2\dot z + 10 z = 0$ (E0) $\lambda^2+2\lambda+10=0$ $\frac{\Delta}{4} = 1-10=-9=(3i)^2$; $\lambda = -1\pm 3i$

$\boxed{z(t) = a\cdot e^{-t}\cos(3t)+b\cdot e^{-t}\sin(3t)}$; $z\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$; $a,b\in\mathbb{R}$: int. gen. di (E0)

Avrei risonanze se $f(t)=3t$ o $g(t)=5\cdot e^t\cdot\cos(3t)$ fossero soluzioni di (E0), ma ciò non accade.

Cerco una soluzione di (E1) $\ddot x+2\dot x+10x=3t$ della forma $x(t)=ct+d$.

$\Rightarrow \dot x = c \Rightarrow \ddot x=0$; $2c+10(ct+d) = 10c\cdot t + 2c+10d = 3t \iff \begin{cases}10\cdot c=3\\2c+10d=0\end{cases} \iff \begin{cases} c=\frac{3}{10}\\ d=-\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{10} = -\frac{3}{50}\end{cases}$

$\boxed{x_1(t)= \frac{3}{10}t - \frac{3}{50} \text{ è soluz. di } (E_1)}$

Risolvo ora (E_2) $\ddot x + 2\dot x + 10x = 5\cdot e^t\cdot\cos(3t)$

Provo con $x(t) = e^t[c\cdot\cos(3t)+d\sin(3t)]$

$\dot x(t) = e^t\cdot[c\cdot\cos(3t)+d\sin(3t)] + e^t[-3c\cdot\sin(3t)+3d\cdot\cos(3t)]$

$\cancel{\ddot x(t) = e^t[c\cos(3t)+d\sin(3t)] + e^t[-6c\cos(3t)+6d\sin(3t)] - e^t[9c\sin(3t) \ldots]}$

$= e^t[\cos(3t)(c+3d)+\sin(3t)(d-3c)]$

$\ddot x(t) = e^t[\cos(3t)(c+3d)+\sin(3t)(d-3c)] + e^t[-3(c+3d)\sin(3t)+3(d-3c)\cos(3t)]$

$= e^t[\cos(3t)(c+3d+3d-9c)+\sin(3t)(d-3c-3c-9d)]$

$= e^t[\cos(3t)(6d-8c) - \sin(3t)(8d+6c)]$

$(E_2) \iff 5\cdot e^t\cdot\cos(3t) = e^t[\cos(3t)(6d-8c)-\sin(3t)(8d+6c)]$
$+2e^t[\cos(3t)(c+3d)+\sin(3t)(d-3c)]$
$+10e^t\cdot[\cos(3t)\cdot c+\sin(3t)\cdot d]$

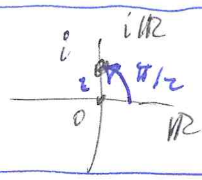
$= e^t\cdot\{\cos(3t)[(6d-8c)+2(c+3d)+10c]+\sin(3t)[-(8d+6c)+2(d-3c)+10d]\}$

$= e^t\cdot\{\cos 3t\cdot[12d+4c]+\sin(3t)[4d-12c]\} \iff \begin{cases}12d+4c=5\\4d-12c=0\end{cases} \iff \begin{cases}(36+4)c=5\\d=3c\end{cases}$

$\iff \begin{cases}c=5/40=1/8\\d=3/8\end{cases}$; $\boxed{x_2(t)= e^t\left[\frac{1}{8}\cos(3t)+\frac{3}{8}\sin(3t)\right] \text{ è soluz. di } (E_2)}$

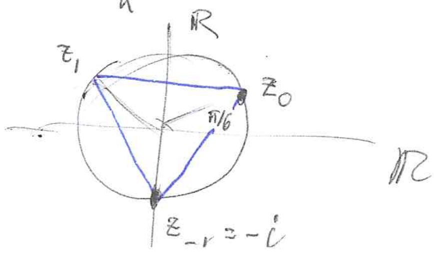
$\boxed{x(t)= a\cdot e^{-t}\cos(3t)+b\cdot e^{-t}\sin(3t)+\frac{3}{10}t-\frac{3}{50}+\frac{e^t}{8}[\cos(3t)+3\sin(3t)] \text{ è l'int. gen. di } (E);\ x\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})}$.

(2) $z^2+2z+10=0 \iff z=-1\pm 3i$ (fatto in (1)).



$i-z^3=0 \iff z^3=i=e^{i\pi/2}$

$\iff z=z_k = e^{i(\pi/2+2k\pi)\frac{1}{3}} = e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi k)} = \boxed{\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi k\right)}$ con $k=0,\pm 1$



$\boxed{\begin{array}{l} z_0=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt3}{2}+\frac{i}{2} \\ z_1=-\frac{\sqrt3}{2}+i \qquad z_{-1}=-i\end{array}}$

(3) $\partial_x f(x,y) = \dfrac{y(2x^2+3y^2+1) - xy\,4x}{(2x^2+3y^2+1)^2} = \dfrac{y\cdot(-2x^2+3y^2+1)}{(2x^2+3y^2+1)^2}$

$\partial_y f(x,y) = \dfrac{x(2x^2+3y^2+1) - xy\cdot 6y}{(2x^2+3y^2+1)^2} = \dfrac{x\cdot(-3y^2+2x^2+1)}{(2x^2+3y^2+1)^2}$

$f(1,2) = \dfrac{2}{\cancel{2}+12+1} = \dfrac{2}{15}$; o.k. $\quad \nabla f(1,2) = \left(2\cdot\dfrac{-2+12+1}{(15)^2},\ 1\cdot\dfrac{-12+2+1}{(15)^2}\right) = \left(\dfrac{2\cdot 11}{15^2}, \dfrac{-9}{(15)^2}\right)$

$\Rightarrow f(1+h, 2+k) = \dfrac{2}{15} + \dfrac{2\cdot 11}{15^2}\cdot h - \dfrac{9}{15^2}\cdot k + \underset{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ \text{in } \mathbb{R}^2}}{o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)}$

(5) (i) $\ddot z + a(t)\dot z + b(t) z = (h x_1 - k x_2)^{\cdot\cdot} + a(t)(h x_1 - k x_2)^{\cdot} + b(t)(h x_1 - k x_2)$

$= (h\ddot x_1 - k\ddot x_2) + a(t)(h\dot x_1 - k\dot x_2) + b(t)(h x_1 - k x_2)$

$= h(\ddot x_1 + a(t)\dot x_1 + b(t) x_1) - k(\ddot x_2 + a(t)\dot x_2 + b(t) x_2)$

$= h\cdot k - k\cdot h$ (per ipotesi) $= 0$; vero

(ii) ~~ottenuto~~ sappiamo da (i) che $z = h x_1(t) - k x_2(t)$ è sol. di

(E_0) $\ddot z + a(t)\dot z + b(t) z = 0$, ma (E_0) ha soluzioni non nulle, quindi non possiamo concludere necessariamente che $z(t) = 0$ $\forall t$: falso

(iii) Ragionando come in (i) si ha $\ddot w + a(t)\dot w + b(t) w = \dfrac{k}{h^2+k^2}\cdot k + \dfrac{h}{h^2+k^2}\cdot k = 1$

vero

(iv) Il problema di Cauchy $\begin{cases} \ddot x_1 + a(t)\dot x_1 + b(t) x_1 = k \\ x_1(0) = 0 \\ \dot x_1(0) = A \end{cases}$

ha una soluzione per ogni $A \in \mathbb{R}$ e $A' \neq A'' \Rightarrow$ le soluzioni sono distinte. Ho tante soluzioni quanti sono i valori di $A \in \mathbb{R}$, cioè infinite. vero

(4) Facoltativo!!! ~~Provo a sostituire $z = xy$ in~~

~~$\ddot z + a(t)\dot z - z = R(t)$~~

$xy = 1$

$\Rightarrow 0 = (xy)^{\cdot} = \dot x y + x\dot y$

$\Rightarrow 0 = (xy)^{\cdot\cdot} = \ddot x y + 2\dot x\dot y + x\ddot y$

Sommando: $-2 = -2xy + a(t)(xy)^{\cdot} + (xy)^{\cdot\cdot}$

$= -xy - xy + a(t)\dot x y + a(t) x\dot y + \ddot x y + x\ddot y + 2\dot x\dot y$

per ipotesi su x, y

$= x(-y + a(t)\dot y + \ddot y) + y(-x + a(t)\dot x + \ddot x) + 2\dot x\dot y = x\cdot 0 + y\cdot 0 + 2\cdot\dot x\dot y$

$= 2\dot x\cdot\dot y \Rightarrow \boxed{\dot x\dot y = -1}$