Test di prova per Analisi Matematica TB (04/04/2014)

(1) Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = (y^2 - x^2)(x-1).$$

- Calcolare $\nabla(x,y)$ e $Hess f(x,y)$.
- Calcolare in $(x,y) = (0,1)$: la formula di Taylor al II ordine per f; il differenziale di f; l'equazione dello spazio tangente al grafico di f; l'equazione del piano tangente al grafico di f.
- Sia $v = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$: calcolare $D_v f(0,1)$.
- Trovare i punti critici di f.
- Disegnare sul piano (x,y): l'insieme degli (x,y) su cui $f(x,y) = 0$, quello su cui $f(x,y) > 0$, quello su cui $f(x,y) < 0$.
- Classificare i punti critici di f.

(2) Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ di

$$(z^2+1)^2 + 2(z^2+1) + 3 = 0.$$

(3) Trovare la soluzione $x = x(t)$ del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 3\dot{x} = 3 \cdot e^{\sqrt{3}t} + \sin(3t) \\ x(0) = 1, \\ \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

(4) Siano $a, b, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, con $f \neq 0$, si considerino le equazioni differenziali

$$(E) \quad \ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = f(t)$$

e

$$(EO) \quad \ddot{z} + a(t)\dot{z} + b(t)z = 0.$$

e siano $x_1,\ x_2$ soluzioni di (E).

Quale delle seguenti affermazioni segue *necessariamente* dalle ipotesi?

- $\frac{3}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_1$ è soluzione di (E).
- $\frac{3}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_1$ è soluzione di (EO).
- $\frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_1$ è soluzione di (E).
- $\frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_1$ è soluzione di (EO).

① $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ $\qquad f(x,y) = y\,(y-1)\cdot(x^2-y-1)$

$\partial_x f(x,y) = 2x \cdot y \cdot (y-1) = 2x \cdot (y^2-y)$

$\partial_y f(x,y) = (y-1)\cdot(x^2-y-1) + y\,(x^2-y-1) - y\,(y-1) = (2y-1)x^2 + 1 - 3y^2$

P.ti critici: $\begin{cases} 2x \cdot y \cdot (y-1) = 0 \\ (y-1)\cdot(x^2-y-1) + y(x^2-y-1) - y\,(y-1) = 0 \end{cases}$

se e solo se: $\begin{cases} x = 0 \\ (y-1)(-y-1) - y(y+1) - y(y-1) = 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} y = 1 \\ x^2 - 2 = 0 \end{cases}$

cioè $\begin{cases} x = 0 \\ -3y^2 + 1 = 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = 1 \end{cases}$

$\boxed{A = (0, 1/\sqrt{3});\ B = (0, -1/\sqrt{3});\ C = (1,0);\ D = (-1,0);\ E = (\sqrt{2}, 1);\ F = (-\sqrt{2}, 1) \ : 6 \text{ p.ti critici.}}$

Classifico i p.ti con la matrice Hessiana: $\mathrm{Hess} f(x,y) = \begin{bmatrix} 2(y^2-y) & 2x(2y-1) \\ 2x(2y-1) & 2x^2-6y \end{bmatrix}$

$\mathrm{Hess} f(C) = \mathrm{Hess} f(1,0) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$: $\det(\mathrm{Hess} f(C)) < 0 \Rightarrow$ p.to di sella

$\mathrm{Hess} f(D) = \mathrm{Hess} f(-1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$: p.to di sella

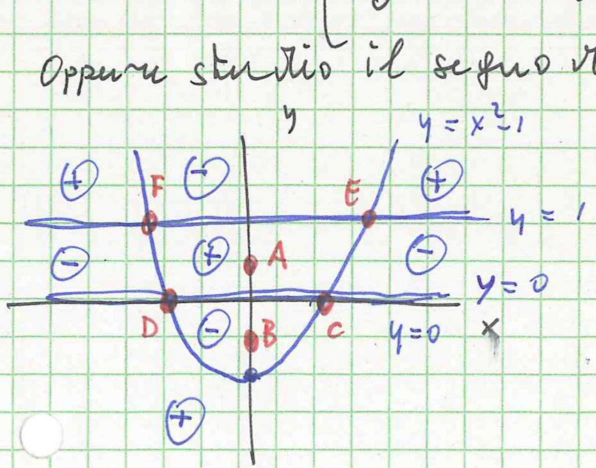
$\mathrm{Hess} f(E) = \mathrm{Hess} f(\sqrt{2},1) = \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -2 \end{bmatrix}$: $\det < 0 \Rightarrow$ p.to di sella

$\mathrm{Hess} f(F) = \begin{bmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$ p.to di sella

$\mathrm{Hess} f(A) = \begin{bmatrix} 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) & 0 \\ 0 & -6\,\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & 0 \\ 0 & - \end{bmatrix}$: def. neg $\Rightarrow$ p.to max. rel.

$\mathrm{Hess} f(B) = \begin{bmatrix} 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) & 0 \\ 0 & 6\,\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} + & 0 \\ 0 & + \end{bmatrix}$: def. pos. $\Rightarrow$ p.to min rel.

Oppure studio il segno di f:



In C, D, E, F la funzione cambia segno: p.ti di sella

In A c'è un max. rel. per T. Weierstrass + T. Fermat

In B c'è un min. rel.

Quanto al resto: $\nabla f(\sqrt{2},1)=(0,0)$ e $f(\sqrt{2},1)=0$.

Quindi $f(x,y) = o\left(\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+(y-1)^2}\right)$, $(x,y)\to(\sqrt{2},1)$: formula di Taylor I ord.

$z=0$: piano tangente in $(\sqrt{2},1)$

$z=0$: spazio tangente in $(\sqrt{2},1)$

$df(\sqrt{2},1)(h,k)=0$

$D_v f(\sqrt{2},1)=0$

(2) Posto $w=z^5$: $0=w^2-10w+29=(w-5)^2+4$

$(w-5)^2=-4=(2i)^2$ $\qquad w-5=\pm 2i \qquad w=5\pm 2i$

$z^5 = 5+2i = R\cdot e^{i\alpha}$ con $R=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$

$\alpha = \operatorname{arctg}(2/5)$

$$\boxed{z_k = \sqrt[10]{29}\cdot\left[\cos\left(\frac{\operatorname{arctg}(2/5)+2k\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\operatorname{arctg}(2/5)+2k\pi}{5}\right)\right]}$$

$k=0,\pm1,\pm2$

o $z^5 = 5-2i = R\cdot e^{i\beta}$ con stesso R e $\beta = \operatorname{arctg}(-2/5)$

$$\boxed{z_k = \sqrt[10]{29}\cdot\left[\cos\left(\frac{-\operatorname{arctg}(2/5)+2k\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{-\operatorname{arctg}(2/5)+2k\pi}{5}\right)\right] \quad k=0,\pm1,\pm2}$$

(3) $\dot{x}\cdot\cos(x) \overset{\circ}{=} t \Rightarrow \int_0^t \cos(x(s))\,\dot{x}(s)\,ds \overset{\circ}{=} \int_0^t s\,ds = t^2/2$

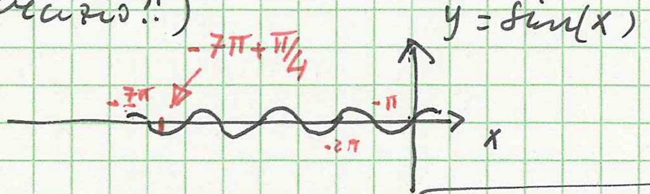
$\int_{x(0)}^{x(t)} \cos(x)\,dx = \sin(x(t)) - \sin(x(0)) = \sin(x(t)) - \sin\left(\frac{\pi}{4}-(2k+1)\pi\right)$

$= \sin(x(t)) - \sin\left(\frac{\pi}{4}-\pi\right) = \sin(x(t)) + \frac{1}{\sqrt{2}}$

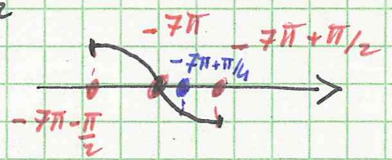
$\Leftrightarrow \sin(x(t)) + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{t^2}{2} \Leftrightarrow \boxed{\sin(x(t)) = \frac{t^2}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}}$

Visto $k=3$ (numero dell'esercizio!!)

$x(0) = \frac{\pi}{4} - 7\pi$:



$\boxed{\begin{array}{c} y=\sin(x) \\ -7\pi-\frac{\pi}{2}\le x\le -7\pi+\frac{\pi}{2}\end{array}} \Leftrightarrow$



$\boxed{\begin{array}{c} y=-\sin(x+7\pi) \\ -\frac{\pi}{2}\le x+7\pi\le\frac{\pi}{2}\end{array}}$

$\Updownarrow$

$\boxed{\begin{array}{c} y=\sin(x) \\ -\frac{\pi}{2}\le x+7\pi\le\frac{\pi}{2}\end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c} -\frac{\pi}{2}\le x+7\pi\le\frac{\pi}{2} \\ \sin(x+7\pi)=\sin(x+\pi)=-\sin(x)=y\end{array}}$

Concludendo:

$$x(t) + 7\pi = \arcsin\left(-\left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$\boxed{x(t) = -7\pi + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{t^2}{2}\right)}$$

$t \in \text{Dominio}(x) \iff -1 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{t^2}{2} < 1 \iff \frac{t^2}{2} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\iff t^2 < 2 + \sqrt{2} \iff \boxed{t \in \left(-\sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2}}\right)}.$

(4) (i) Falso: (E0) ha infinite soluzioni

(ii) Falso: x_1, x_2 sol. di (E)

$\Rightarrow x = x_1 + x_2$ è sol. di $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 2f \neq f$

(iii) Vero: Siano z_1, z_2 sol. lin. indip. di (E0) e sia x_0 una sol di (E): le soluzioni di (E) sono

$$x_0 + \alpha z_1 + \beta z_2 \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ne trovo sempre tre lin. indip. ~~prese~~. Infatti x_0 è lin. ind. da z_1, z_2 (altrimenti: $x_0 = c_1 z_1 + c_2 z_2$ sarebbe sol. di (E0), non di (E)).

Mostro che x_0, $x_0 + z_1$, $x_0 + z_2$ sono lin ind.

Se fosse $0 = \lambda x_0 + \mu(x_0 + z_1) + \nu(x_0 + z_2)$ con $\nu, \mu, \lambda \in \mathbb{R}$

$= (\lambda + \mu + \nu) x_0 + \mu z_1 + \nu z_2$

allora $\nu = \mu = \lambda + \mu + \nu = 0$ (perché x_0, z_1, z_2 lin. ind.)

$\Rightarrow \nu = \mu = \lambda = 0$.

(iv) è falsa perché (iii) è vera.