Test di prova per Analisi Matematica TB (11/04/2014)

Esercizi per il primo parziale.

(1) (Può essere utile usare una calcolatrice in alcuni punti dello svolgimento). Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1\right)(x-1)y.$$

- Calcolare $\nabla(x, y)$ e $Hessf(x, y)$.
- Calcolare in $(x, y) = (0, 0)$: la formula di Taylor al II ordine per f; il differenziale di f; l'equazione dello spazio tangente al grafico di f; l'equazione del piano tangente al grafico di f;
- Trovare i punti critici di f.
- Classificare i punti critici di f.

(2) Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ di

$$(z^5 + 2)^3 - 8 = 0.$$

(3) Trovare tutte le soluzioni $x = x(t)$ di (E) e, tra esse, quelle che soddisfano $x(0) = 0$:

$$(E) \quad \ddot{x} + 9x = \sin(2t).$$

(4) Siano $a, b, f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, con $f \neq 0$, si considerino le equazioni differenziali

$$(E1) \quad \ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = f(t),$$

$$(E2) \quad \ddot{y} + a(t)\dot{y} + b(t)y = g(t),$$

$$(E3) \quad \ddot{w} + a(t)\dot{w} + b(t)w = f(t) + g(t),$$

e

$$(EO) \quad \ddot{z} + a(t)\dot{z} + b(t)z = 0.$$

Quale delle seguenti affermazioni *non* segue *necessariamente* dalle ipotesi?

- Siano $x(t)$ una soluzione di (E1), $y(t)$ una soluzione di (E2): allora $w = x + y$ è una soluzione di (E3).
- Siano $x(t)$ una soluzione di (E1), $y(t)$ una soluzione di (E2): allora $z = x - y$ è una soluzione di (E0).
- Sia ζ una funzione nello sottospazio generato dalle soluzioni di (E1) e (E0) [*cioè, esistono* $p, q \in \mathbb{R}$ *e* x *soluzione di (E1) e* z *soluzione di (E0) tali che* $\zeta = px + qz$]. Allora, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che ζ è soluzione di
$$(E\lambda) \quad \ddot{\zeta} + a(t)\dot{\zeta} + b(t)\zeta = \lambda \cdot f(t),$$
- Sia ζ una funzione nello sottospazio generato dalle soluzioni di (E1). Allora, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che ζ è soluzione della stessa (Eλ) sopra.

Esercizi per il secondo parziale.

(1) Siano $\alpha, \beta, \gamma \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, e si definisca

$$h(x, y) = f(\alpha(x, y), \beta(x, y), \gamma(x, y)).$$

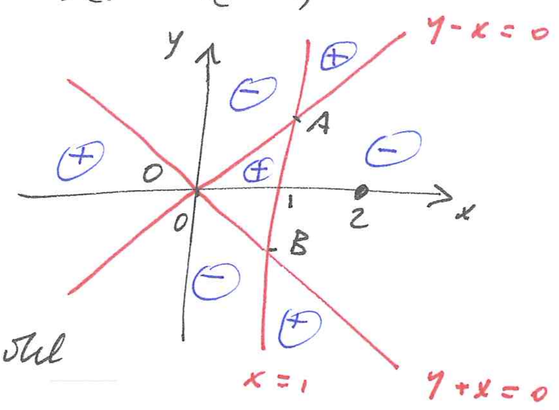
Si calcoli $\nabla h(x_0, y_0)$, con $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Test 04/04/2014 svolto.

1

① $f(x,y)=(y^2-x^2)(x-1)=(y-x)(y+x)(x-1)$

Vedo quando $f \gtreqless 0$:



$f(2,0)<0$

Mi aspetto almeno 4 punti critici:

p.ti di sella in O, A, B

p.to max. rel. all'interno del triangolo $O\hat{A}B$.

- $\nabla f(x,y) = \big(-(y+x)(x-1)+(y-x)(x-1)+(y-x)(y+x),\ (y+x)(x-1)+(y-x)(x-1)\big)$
  $= \big(-2x(x-1)+(y^2-x^2),\ 2y(x-1)\big) = \big(-3x^2+2x+y^2,\ 2y(x-1)\big)$
- $\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} -6x+2 & 2y \\ 2y & 2(x-1) \end{pmatrix}$

$f(0,1)=-1 \qquad \nabla f(0,1)=(1,-2) \qquad \operatorname{Hess} f(0,1)=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

- $f(h,1+k) = -1 + (1,-2)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(h,k)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o(h^2+k^2)_{(h,k)\to(0,0)}$

$= -1 + h - 2k + h^2 + 2hk - k^2 + o(h^2+k^2)_{(h,k)\to(0,0)}$: Formula di Taylor al II ordine.

- Piano tangente: $z = -1 + x - 2(y-1)$
- Spazio tangente: $z = x - 2y$
- Differenziale: $df(0,1)(h,k) = h - 2k$
- $D_v f(0,1) = \nabla f(0,1)\, v = (1,-2)\begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} - \sqrt{3}$

Punti critici:

$\begin{cases} -3x^2+2x+y^2=0 \\ 2y(x-1)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} -3x^2+2x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} y^2-1=0 \\ x=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \text{ o } x=2/3 \\ y=0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} y=\pm 1 \\ x=1 \end{cases}$

$A=(1,1)$; $B=(1,-1)$; $O=(0,0)$: punti di sella

$C=(2/3,0)$: punto di max. relativo.

(2) $w = z^2+1$: $\quad 0 = w^2+2w+3 = w^2+2w+1+2 = (w+1)^2 + \sqrt{2}^2$

$\Leftrightarrow \; w = -1 \pm i\sqrt{2}$: $\quad z^2+1 = -1+i\sqrt{2}$ o $z^2+1 = -1-i\sqrt{2}$

$z^2 = -2+i\sqrt{2}$ o $z^2 = -2-i\sqrt{2}$

$|-2+i\sqrt{2}| = |-2-i\sqrt{2}| = \sqrt{6}$ e $\operatorname{arctg}\left(\frac{\pm\sqrt{2}}{-2}\right)+\pi = \mp\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\pi$ sono gli argomenti:

$z^2 = \sqrt{6}\cdot e^{i(\pi \mp \operatorname{arctg}(1/\sqrt{2}))}$

$\Rightarrow \; z = \pm\sqrt[4]{6}\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} \mp \frac{\operatorname{arctg}(1/\sqrt{2})}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} \mp \frac{\operatorname{arctg}(1/\sqrt{2})}{2}\right)\right]$

cioè $z = \pm\sqrt[4]{6}\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi-\operatorname{arctg}(1/\sqrt{2})}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi-\operatorname{arctg}(1/\sqrt{2})}{2}\right)\right]$

o $z = \pm\sqrt[4]{6}\cdot\left\{\cos\left(\frac{\pi+\operatorname{arctg}(1/\sqrt{2})}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+\operatorname{arctg}(1/\sqrt{2})}{2}\right)\right]$

(3) (EO) $\ddot{z}+3\dot{z}=0$ $\quad \lambda^2+3\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=0,-3$: $z(t) = a+be^{-3t}$ è l'int. gen. (EO)

Cerco $x(t) = c\,e^{\sqrt{3}t} + d\cdot\sin(3t) + e\cdot\cos(3t)$

$\dot{x}(t) = \sqrt{3}c\cdot e^{\sqrt{3}t} + 3d\cdot\cos(3t) - 3e\cdot\sin(3t)$

$\ddot{x}(t) = 3c\cdot e^{\sqrt{3}t} - 9d\cdot\sin(3t) - 9e\cdot\cos(3t)$.

Sostituisco:

$3\cdot e^{\sqrt{3}t} + \sin(3t) \overset{?}{=} \ddot{x}+3\dot{x} = (3c\,e^{\sqrt{3}t} - 9D\cdot\sin(3t) - 9e\cdot\cos(3t))$
$+3(\sqrt{3}c\,e^{\sqrt{3}t} + 3d\cdot\cos(3t) - 3e\cdot\sin(3t))$

$= e^{\sqrt{3}t}\cdot 3(1+\sqrt{3})c + \sin(3t)\cdot(-9D-9e) + \cos(3t)(-9e+9d)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{1+\sqrt{3}} \\ -9(D+e) = 1 \\ 9(-e+D) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{1+\sqrt{3}} \\ D = E = -\frac{1}{18} \end{cases}$

int. gen.: $x(t) = \frac{1}{1+\sqrt{3}}\,e^{\sqrt{3}t} - \frac{1}{18}\sin(3t) - \frac{1}{18}\cos(3t) + a + b\cdot e^{-3t}$

$\dot{x}(t) = \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\,e^{\sqrt{3}t} - \frac{1}{6}\cos(3t) + \frac{1}{6}\sin(3t) - 3b\cdot e^{-3t}$

$\begin{cases} 1 = x(0) = \frac{1}{1+\sqrt{3}} - \frac{1}{18} + a + b \\ 0 = \dot{x}(0) = \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} - \frac{1}{6} - 3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{-1}{18} + \frac{1}{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})} \\ a = \frac{1}{9} - \frac{1}{1+\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})} + 1 \end{cases}$

$= \frac{1}{9} - \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})} = \frac{1}{9} - \frac{1}{\sqrt{3}}$

$x(t) = \frac{1}{1+\sqrt{3}}\,e^{\sqrt{3}t} - \frac{1}{18}\sin(3t) - \frac{1}{18}\cos(3t) + \frac{1}{9} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})} - \frac{1}{18}\right)e^{-3t}$

(4) Sostituendo $x = \lambda x_1 + \mu x_2$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = \lambda \ddot{x}_1 + \mu \ddot{x}_2 + a\lambda \dot{x}_1 + a\mu \dot{x}_2 + b\lambda x_1 + b\mu x_2$$

$$= \lambda(\ddot{x}_1 + a\dot{x}_1 + bx_1) + \mu(\ddot{x}_2 + a\dot{x}_2 + bx_2)$$

$$= \lambda f + \mu f = (\lambda + \mu) f$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) f = \frac{1}{2} f & \text{se } \lambda = \frac{3}{4}, \mu = -1/4 \\ \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) f = f & \text{se } \lambda = 3/4, \mu = 1/4 \end{cases}$$

La risposta corretta è la terza.