Test di prova per Analisi Matematica TB (18/04/2014)

Esercizi per il primo parziale (di alcuni ho messo due/tre versioni diverse, che consiglio di fare).

(1a) (5 punti critici; qui è necessario analizzare la matrice hessiana). Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \left(\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} - 1\right)(x^2 + y^2 - 1).$$

- Calcolare $\nabla(x, y)$ e $Hess f(x, y)$.
- Calcolare in $(x, y) = (1, 0)$: la formula di Taylor al II ordine per f; il differenziale di f; l'equazione dello spazio tangente al grafico di f; l'equazione del piano tangente al grafico di f.
- Trovare i punti critici di f.
- Classificare i punti critici di f.

(1b) (9 punti critici; qui si può fare a meno di analizzare la matrice hessiana). Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \left(\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} - 1\right)\left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} - 1\right).$$

- Calcolare $\nabla(x, y)$ e $Hess f(x, y)$.
- Calcolare in $(x, y) = (3, 0)$: la formula di Taylor al II ordine per f; il differenziale di f; l'equazione dello spazio tangente al grafico di f; l'equazione del piano tangente al grafico di f.
- Trovare i punti critici di f.
- Classificare i punti critici di f.

(2) Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ di

$$z^4 + z^2 + 1 = 0.$$

(Si può anche fare diversamente dal solito, se si vuole: moltiplicate tutto per $(z^2 - 1)$).

(3k) Trovare la soluzione $x = x(t)$ del problema di Cauchy e determinarne il dominio:

$$\begin{cases} \dot{x}x(t^2 - 1) + t(x^2 + 1) = 0 \\ x(0) = k, \end{cases}$$

con $k = \frac{1}{2}, 1, 2$. Trovate il dominio di x nei tre casi.

(4a) Siano $z(t) = e^t$, $w(t) = t^2 - t + 2$, $z, w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Quale coppia di funzioni $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fa sì che z e w siano soluzioni dell'equazione differenziale

$$(EO) \quad \ddot{\xi} + a(t)\dot{\xi} + b(t)\xi = 0?$$

- Nessuna: comunque io scelga a e b, le funzioni z e w non possono essere soluzioni di (EO).
- $a(t) = e^t \frac{t - t^2}{t^2 - 3t + 3}$, $b(t) = e^{-t} \frac{2t - 3}{t^2 - 3t + 3}$.
- $a(t) = e^t \frac{t - t^2}{t^2 - 3t + 3}$, $b(t) = e^t \frac{2t - 3}{t^2 - 3t + 3}$.
- $a(t) = \frac{t - t^2}{t^2 - 3t + 3}$, $b(t) = \frac{2t - 3}{t^2 - 3t + 3}$.

(La regola di Cramer può aiutare).

(4b) Lo stesso esercizio con $z(t) = e^t$, $w(t) = t^2 - t + 1$, $z, w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e con $\frac{2t-3}{t^2-3t+2}$ al posto di $\frac{2t-3}{t^2-3t+3}$, e $\frac{t-t^2+1}{t^2-3t+2}$ al posto di $\frac{t-t^2}{t^2-3t+3}$ nelle risposte.

Esercizi per il secondo parziale.

(1) Siano $\alpha, \beta, \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ e $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, e si definisca

$$h(x, y, z) = \varphi(x \cdot z \cdot \alpha(x, y, z) + y \cdot \beta(x, y, z)).$$

Si calcoli $\nabla h(x_0, y_0, z_0)$, con $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$.

(2) Trovare il valore massimo di

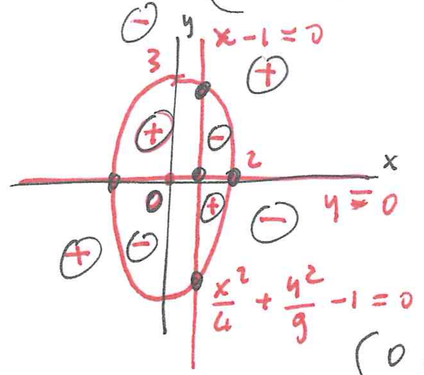
$$f(x, y) = xy$$

su $\Gamma = \{(x, y) : (x-1)^2 + y^2 = 1\}$. (Motivare, considerando anche se Γ sia chiuso e limitato).

11/04/2014 I PARZIALE

① $f(x,y)=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1\right)(x-1)\,y$

$$\begin{cases} \partial_x f = \frac{2x}{4}(x-1)y+\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1\right)y = 0 \\ \partial_y f = \frac{2y}{9}(x-1)y+\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1\right)(x-1) = 0 \end{cases} \iff (x,y) \text{ è critico}$$



Mi aspetto punti critici (di sella) ~~effetti~~ all'incrocio delle curve di zeri: $(\pm 2,0)$; $(1,0)$; $\left(1;\pm 3\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

e due MAX. rel., due min. rel.

Il sistema è $\begin{cases} 0 = y\cdot\left[\frac{2x}{4}(x-1)+\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1\right)\right] \\ 0 = (x-1)\left[\frac{2y}{9}y+\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1\right)\right] \end{cases}$: 4 possibilità:

$1\begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases}$ $2\begin{cases} y=0 \\ x=\pm 2 \end{cases}$ $3\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1=0 \\ x=1 \end{cases}$ $4\begin{cases} \frac{2x}{4}(x-1)+\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1\right)=0 \\ \frac{2y}{9}y+\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1\right)=0 \end{cases}$

$$\underbrace{(1,0) \qquad (\pm 2,0) \qquad \left(1,\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}_{\text{punti di sella}}$$

sottraendo (o confrontando):

$$4\begin{cases} \frac{2x}{4}(x-1) = \frac{2}{9}y^2 \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}-1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = \frac{9}{4}x(x-1) \\ \frac{x^2}{4}+\frac{3}{4}x(x-1)-1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 = \frac{9}{4}x(x-1) \\ x^2-\frac{3}{4}x-1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{3/4 \pm\sqrt{9/16+4}}{2} = \frac{3}{8}\pm\frac{\sqrt{73}}{8} \\ y^2 = \frac{9}{4}\cdot\left(\frac{3}{8}\pm\frac{\sqrt{73}}{8}\right)\cdot\left(-\frac{5}{8}\pm\frac{\sqrt{73}}{8}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3+\sqrt{73}}{8} > 0 \\ y = \pm\frac{3}{2}\cdot\sqrt{\frac{3+\sqrt{73}}{8}}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{73}-5}{8}} = \pm y_1 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x = \frac{3-\sqrt{73}}{8} < 0 \\ y = \pm\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{73}-3}{8}}\cdot\sqrt{\frac{5+\sqrt{73}}{8}} = \pm y_2 \end{cases}$$

$\left(\frac{3+\sqrt{73}}{8}, y_1\right)$ e $\left(\frac{3-\sqrt{73}}{8}, -y_2\right)$: punti di min. rel.

$\left(\frac{3+\sqrt{73}}{8}, -y_1\right)$ e $\left(\frac{3-\sqrt{73}}{8}, y_2\right)$: punti di MAX. rel.

Avendo $f(0,0)=0$; $\nabla f(0,0)=(0,1)$; $\mathrm{Hess}\,f(0,0)=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

poiché: $\partial_{xy}f(x,y)=\frac{x(x-1)}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}-1$ e $\partial_{xx}f(x,y)=\frac{2x-1}{2}y+y\cdot\frac{x}{2}$

e $\partial_{yy}f(x,y)=\frac{4}{9}y(x-1)+\frac{2}{9}y(x-1)$, abbiamo

Taylor II ordine: $f(h,k)=k-hk+\underset{(h,k)\to(0,0)}{o(h^2+k^2)}$

$df(0,0)\binom{h}{k}=k$: differenziale

$z=y$: equazione di piano tangente = spazio tangente.

(2) $w = z^5 + z$: $\quad w^3 = 8 \quad w = 2\cdot\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}k\right) + i\cdot\sin\left(\frac{2\pi k}{3}\right)\right];\ k = 0, \pm 1$

$w_0 = 2;\quad w_{\pm 1} = 2\cdot\left(\cos\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right) + i\cdot\sin\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$= 2\cdot\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \pm i\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\cdot\left(-\frac{1}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 \pm i\sqrt{3}$

$w_0 \quad z^5 + z = 2 \quad z^5 = 0 \quad z = 0$

$w_1 \quad z^5 + z = -1 + i\sqrt{3} \quad z^5 = -3 + i\sqrt{3} = \sqrt{9+3}\cdot e^{i\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{-3}\right) + \pi\right)}$

$= \sqrt{12}\, e^{i(\pi - \operatorname{arctg}(1/\sqrt{3}))} = 2\sqrt{3}\cdot e^{i(\pi - \operatorname{arctg}(1/\sqrt{3}))}$

$z = \sqrt[10]{12}\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi - \operatorname{arctg}(1/\sqrt{3}) + 2k\pi}{5}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi - \operatorname{arctg}(1/\sqrt{3}) + 2k\pi}{5}\right)\right]$

con $k = 0, \pm 1, \pm 2$

w_2 allo stesso modo:

$z = \sqrt[10]{12}\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi + \operatorname{arctg}(1/\sqrt{3}) + 2k\pi}{5}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi + \operatorname{arctg}(1/\sqrt{3}) + 2k\pi}{5}\right)\right]$

con $k = 0, \pm 1, \pm 2$

(3) (E) $\ddot{x} + 9x = \sin(2t) \quad$ (E0) $\ddot{z} + 9z = 0 \quad \lambda^2 + 9 = 0$

$\lambda = \pm 3i \quad z(t) = a\cdot\cos(3t) + b\cdot\sin(3t)$: int. gen. (E0)

Provo con: $x(t) = c\cdot\cos(2t) + d\cdot\sin(2t)$

$\ddot{x}(t) = -4\cdot c\cdot\cos(2t) - 4\cdot d\cdot\sin(2t)$

$\sin(2t) \overset{?}{=} \ddot{x} + 9x = -4c\cdot\cos(2t) - 4d\sin(2t) + 9\cdot(c\cdot\cos(2t) + d\cdot\sin(2t))$

$= \cos(2t)[-4c + 9c] + \sin(2t)[-4d + 9d]$

$\Leftrightarrow c = 0$ e $5d = 1$: $\quad x(t) = \frac{1}{5}\sin(2t)$ è una sol. di (E).

$\boxed{x(t) = \frac{1}{5}\sin(2t) + a\cdot\cos(3t) + b\sin(3t)}$: int. gen. (E)

La condizione $x(0) = 0$ diventa:

$0 = x(0) = a$: $\quad a = 0$. Le soluzioni di (E) con $x(0) = 0$

sono $\boxed{x(t) = \frac{1}{5}\sin(2t) + b\cdot\sin(3t),\quad b \in \mathbb{R}.}$

(4) La seconda è falsa: se $z = x - y$, allora

$$\ddot{z} + a(t)\dot{z} + b(t)z = (\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x) - (\ddot{y} + a(t)\dot{y} + b(t)y)$$
$$= f(t) - g(t) \neq 0, \text{ in generale.}$$

La prima è vera per ragioni analoghe.

La terza è vera: se $\zeta = px + qz$, allora

$$\ddot{\zeta} + a(t)\dot{\zeta} + b(t)\zeta = p \cdot f(t) + q \cdot 0 = p \cdot f(t),$$

quindi la tesi vale con $\lambda = p$.

La quarta è vera: il sottospazio generato dalle soluzioni di (E_1) contiene funzioni del tipo $p \cdot x$ al variare di $p \in \mathbb{R}$ e x soluzione di (E_1).

Ma le soluzioni di (E_1) sono $x = x_0 + z$ con x_0 soluzione di (E_1) fissata e z soluz. di (E_0).

Cioè, lo spazio generato dalle sol. di (E_1) contiene le funzioni $p(x_0 + z) = px_0 + pz$

Ora, $p \cdot z$ è una qualsiasi soluzione di (E_0): lo spazio vett. generato da (E_1) è lo stesso che è generato da (E_1) e (E_0) insieme.

Quindi la risposta è come nella terza.

II PARZIALE

Sia $f = f(v, v, w)$

(1) $$\partial_x h(x_0, y_0) = \partial_v f(\alpha(x_0, y_0), \beta(x_0, y_0), \gamma(x_0, y_0)) \cdot \partial_x \alpha(x_0, y_0)$$
$$+ \partial_v f(\alpha(x_0, y_0), \beta(x_0, y_0), \gamma(x_0, y_0)) \cdot \partial_x \beta(x_0, y_0)$$
$$+ \partial_w f(\alpha(x_0, y_0), \beta(x_0, y_0), \gamma(x_0, y_0)) \cdot \partial_x \beta(x_0, y_0)$$

Posto $P_0 = (\alpha(x_0, y_0), \beta(x_0, y_0), \gamma(x_0, y_0)) \in \mathbb{R}^3$ per brevità,

$$\partial_y h(x_0, y_0) = \partial_v f(P_0) \cdot \partial_y \alpha(x_0, y_0) + \partial_v f(P_0) \partial_y \beta(x_0, y_0)$$
$$+ \partial_w f(P_0) \cdot \partial_y \gamma(x_0, y_0).$$