# II Prova di Analisi Matematica I (17/02/2014)

Nome.............................................Cognome................................................. Matricola.................

Di ogni esercizio che non sia a risposta multipla, riportare i passaggi essenziali che portano alla soluzione.

(1) [5 pti] Calcolare l'integrale:

$$I = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} e^{\sqrt{3x-1}} dx$$

$$\int_{1/3}^{2/3} e^{\sqrt{3x-1}}\, dx =$$

sostituisco $y = \sqrt{3x-1} = (3x-1)^{1/2}$

$dy = \frac{1}{2} \frac{3}{\sqrt{3x-1}}\, dx = \frac{3}{2} \frac{dx}{y}$

$x\Big|_{1/3}^{2/3} \Rightarrow y\Big|_0^1$

$$= \frac{2}{3} \int_0^1 e^y \cdot y\, dy =$$

integro per parti

$$= \frac{2}{3} \left(e^y \cdot y\right)\Big|_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 e^y\, dy = \frac{2}{3} e - \frac{2}{3} \left(e^y\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3} e - \frac{2}{3}(e-1) = \boxed{\frac{2}{3}}$$

(2) [5 pti] Calcolare il limite

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1+3x}{1-3x}} - e^{\frac{1+9x}{1+3x}}}{x^2}.$$

È un limite 0/0, sviluppo il numeratore all'ordine 2.

$$\frac{1+3x}{1-3x} = (1+3x)\cdot(1+3x+(3x)^2+o(x^2)) = 1+6x+18x^2+o(x^2)$$

$$\frac{1+9x}{1+3x} = (1+9x)\cdot(1-3x+(3x)^2+o(x^2)) = 1+6x-18x^2+o(x^2)$$

$$\Rightarrow \frac{e^{\frac{1+3x}{1-3x}} - e^{\frac{1+9x}{1+3x}}}{x^2} = \frac{e^{1+6x+18x^2+o(x^2)} - e^{1+6x-18x^2+o(x^2)}}{x^2}$$

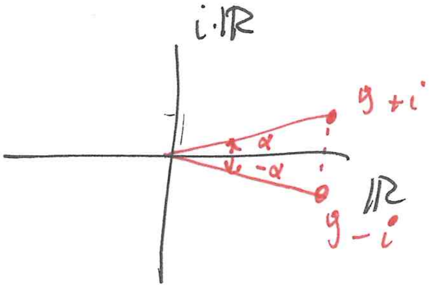
$$= \frac{e^{1+6x}}{x^2}\left(e^{18x^2+o(x^2)} - e^{-18x^2+o(x^2)}\right) = \frac{e^{1+6x}}{x^2}\cdot\left[(1+18x^2+o(x^2))-(1-18x^2+o(x^2))\right]$$

$$= \frac{e^{1+6x}}{x^2}(36x^2+o(x^2)) = e^{1+6x}\cdot(36+o(1)) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \boxed{36\cdot e}$$

(3) [2 pti] Trovare le soluzioni complesse dell'equazione

$$(9+i)z^3 = 9-i$$

e rappresentarle sul piano complesso.

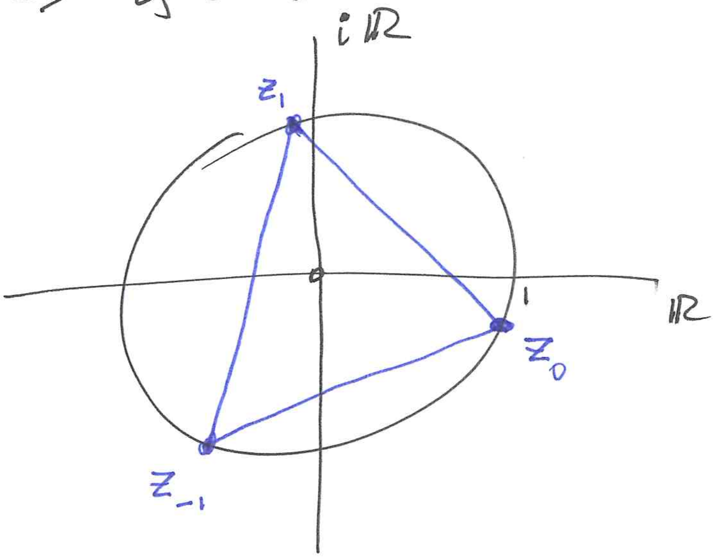



$$z^3 = \frac{9-i}{9+i} = R\cdot e^{i\beta}$$

$$R = \frac{|9-i|}{|9+i|} = 1$$

e $\beta = (-\alpha)-(\alpha)$ con $\alpha = \arctan(1/9)$

$$\Rightarrow z_j = e^{i\left(\frac{-2}{3}\arctan(1/9) + \frac{2k\pi}{3}\right)}$$ con $k = 0, \pm 1$.



(4) [8 pti] Studiare la funzione

$$f(x) = |x^2 - 81| \cdot e^{-\frac{|x|}{9}}$$

e tracciarne il grafico. In particolare, trovare: (i) il dominio *Dominio*$(f)$ di $f$; (ii) gli intervalli su cui $f$ è continua; (iii) i limiti di $f$ agli estremi di questi intervalli; (iv) la derivata $f'$ di $f$ e il suo dominio; (v) gli intervalli su cui $f$ cresce strettamente, decresce strettamente; (vi) i punti di massimo e minimo relativo di $f$; (vii) le soluzioni di $f(x) = 0$.

$\boxed{\text{Dominio}(f) = \mathbb{R}}$ e $\boxed{f \text{ è continua su } \mathbb{R}.}$

$f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ e $f(x) = 0 \iff x = \pm 9$ osservo che $f(x) = f(-x)$: $f$ è pari.

$$f(x) = \frac{|x^2-81|}{e^{|x|/9}} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$$ per confronto tra ordini di infinito.

Dominio$(f') \supseteq \mathbb{R} \setminus \{\pm 9, 0\}$ e

$$f'(x) = \left[\operatorname{sgn}(x^2-81) \cdot 2x - |x^2-81| \operatorname{sgn}(x)/9\right] e^{-|x|/9}$$
$$= \operatorname{sgn}(x^2-81) \cdot \left[2x - \frac{\operatorname{sgn}(x)}{9}(x^2-81)\right] \cdot e^{-|x|/9} = A(x) \cdot B(x) \cdot e^{-|x|/9}$$

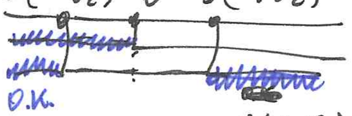
$A(x) > 0 \iff x^2 - 81 > 0 \iff x < -9$ o $x > 9$

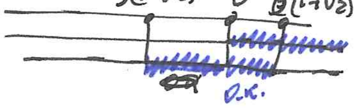
$B(x) > 0 \iff \begin{cases} x > 0 \\ 2x + \frac{x^2-81}{9} > 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} x < 0 \\ 2x - \frac{x^2-81}{9} > 0 \end{cases}$

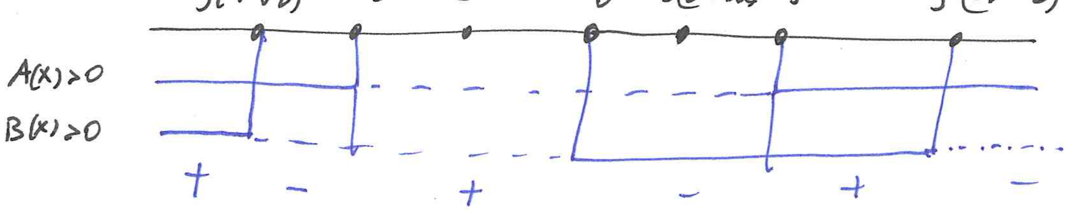
$\iff \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + 2 \cdot 9 \cdot x - 81 > 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 2 \cdot 9 \cdot x - 81 < 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x < 0 \\ x < 9(-1-\sqrt{2}) \text{ o } x > 9(-1+\sqrt{2}) \end{cases}$ o $\begin{cases} 9(1-\sqrt{2}) < x < 9(1+\sqrt{2}) \end{cases}$

Risolvo:
$x^2 + 2 \cdot 9 \cdot x - 81 > 0$
$x = -9 \pm \sqrt{9^2 + 81} = -9 \pm 9\sqrt{2} = 9(-1 \pm \sqrt{2})$
e $x^2 - 2 \cdot 9 \cdot x - 81 > 0$
$x = 9 \pm 9\sqrt{2} = 9(1 \pm \sqrt{2})$




$f$ cresce su $(-\infty, 9(-1-\sqrt{2})]$, $[-9, 0]$, $[9, 9(1+\sqrt{2})]$
$f$ decresce su $[9(-1-\sqrt{2}), -9]$, $[0, 9]$, $[9(1+\sqrt{2}), +\infty)$

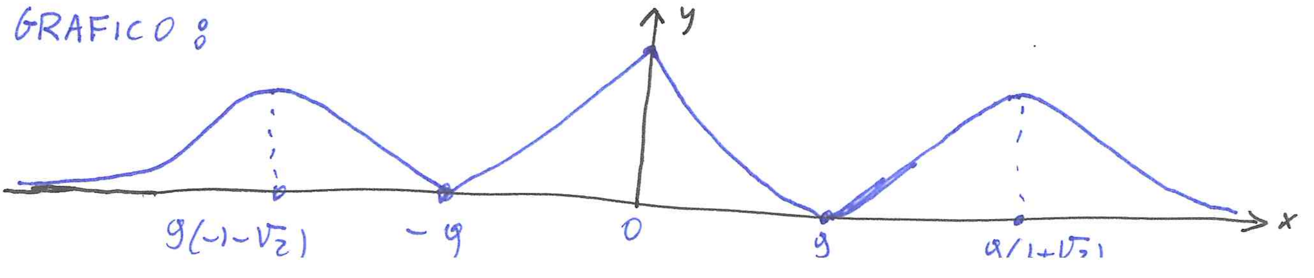
$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 9 \neq -9 = \lim_{x \to 0^-} f'(x)$

$\lim_{x \to 9^+} f'(x) = 18 \cdot e^{-2} \neq -18 \cdot e^{-2} = \lim_{x \to 9^-} f'(x)$

e poiché $f$ è pari, $\lim_{x \to -9^-} f'(x) \neq \lim_{x \to -9^+} f'(x)$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Dominio}(f') = \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 9\}}$

GRAFICO:



(5) [3 pti] Sia $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e si supponga che $f(0) = 1$ e che $f(-1) = f(1) = 0$. Quale delle seguenti affermazioni *segue necessariamente* dalle ipotesi su $f$?

- F Esiste $c$ in $[-1,1]$ tale che $f'(c) = 0$.
- V L'equazione $f(x) - |x| = 0$ ha almeno due soluzioni in $[-1,1]$.
- F Per ogni $x$ in $[-1,1]$ si ha che $f(x) \geq 0$.
- F L'equazione $f(x) + |x| = 0$ ha almeno due soluzioni in $[-1,1]$.

(6) [3 pti] Calcolare il limite di successione

$$L = \lim_{n\to\infty} \left( e\left(\frac{n-3}{n+3}\right)^n + \pi\left(\frac{n^2-9}{n^2+9}\right)^n + \sqrt{2}\left(\frac{n-3}{n+3}\right)^{n^2} \right)$$

$$\left(\frac{n-3}{n+3}\right)^n = \left(\frac{n+3-6}{n+3}\right)^n = \left[\left(1-\frac{6}{n+3}\right)^{n+3}\right]^{\frac{n}{n+3}} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-6}$$

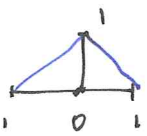
$$\left(\frac{n^2-9}{n^2+9}\right)^n = \dots = \left[\left(1-\frac{18}{n^2+9}\right)^{n^2+9}\right]^{\frac{n}{n^2+9}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \left(e^{-18}\right)^0 = 1$$

$$\left(\frac{n-3}{n+3}\right)^{n^2} = \left[\left(1-\frac{6}{n+3}\right)^{n+3}\right]^{\frac{n^2}{n+3}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \left(e^{-6}\right)^{+\infty} = e^{-\infty} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{L = e\cdot e^{-6} + \pi\cdot 1 + \sqrt{2}\cdot 0 = e^{-5} + \pi}$$

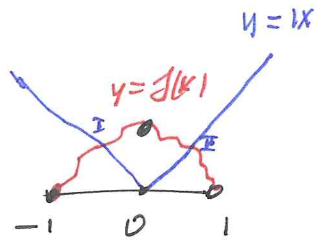
Soluzione dell'esercizio 5 in dettaglio.

- La prima non può essere perché non so se $f$ è derivabile:

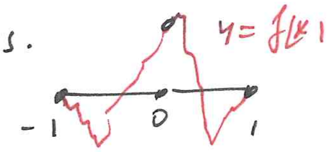



per esempio

- La seconda affermazione segue per il Teorema degli zeri, sintetizzato in figura:

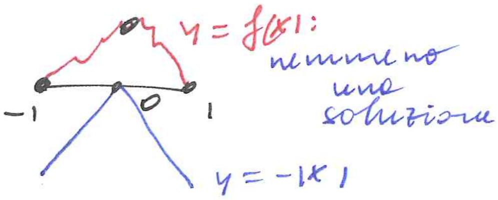



- La terza non segue di necessità: p.es.




- La quarta non segue di necessità,

p.es.



(7) [4 pti] Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili e si definisca $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \arctan\left(\frac{f(x) + g(x)}{1 - f(x)g(x)}\right) - \arctan(f(x)) - \arctan(g(x)).$$

Calcolare $h'(x)$ per $x$ in $\mathbb{R}$. È vero che la funzione $h$ è costante su $\mathbb{R}$? Se sì, quale?

$$h'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{f(x)+g(x)}{1-f(x)g(x)}\right)^2} \cdot \frac{(f'(x)+g'(x))(1-f(x)g(x)) - (f(x)+g(x))\cdot(-f'(x)g(x)-f(x)g'(x))}{(1-f(x)g(x))^2} - \frac{f'(x)}{1+f(x)^2} - \frac{g'(x)}{1+g'(x)^2}$$

$$= \frac{f'(x)\left(1-f(x)g(x)+(f(x)+g(x))g(x)\right) + g'(x)\left(1-f(x)g(x)+(f(x)+g(x))f(x)\right)}{(1-f(x)g(x))^2+(f(x)+g(x))^2} - \frac{f'(x)}{1+f(x)^2} - \frac{g'(x)}{1+g(x)^2}$$

$$= \frac{f'(x)\cdot(1+g(x)^2) + g'(x)\cdot(1+f(x)^2)}{1-\cancel{2f(x)g(x)}+f(x)^2g(x)^2+f(x)^2+\cancel{2f(x)g(x)}+g(x)^2} - \frac{f'(x)}{1+f(x)^2} - \frac{g'(x)}{1+g(x)^2}$$

$$= \frac{f'(x)\cdot(1+g(x)^2) + g'(x)(1+f(x)^2)}{(1+f(x)^2)(1+g(x)^2)} - \frac{f'(x)}{1+f(x)^2} - \frac{g'(x)}{1+g(x)^2}$$

$$= \frac{f'(x)}{1+f(x)^2} + \frac{g'(x)}{1+g(x)^2} - \frac{f'(x)}{1+f(x)^2} - \frac{g'(x)}{1+g(x)^2} = \boxed{0}$$

cioè, $h'(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, quindi $h$ è costante.

Supponendo che $f(0) = g(0) = 0$,

abbiamo $h(x) = h(0) = \arctan(0) - \arctan(0) - \arctan(0) = 0$,

quindi $\boxed{h(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}}$

(ci vorrebbe un ragionamento leggermente più sofisticato per esserne veramente sicuri.

Infatti, $\arctan\left(\frac{u+v}{1-uv}\right) = \arctan(u) + \arctan(v)$

è una formula di trigonometria inversa, che abbiamo appena dimostrato (ma lo si potrebbe fare a partire da $\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\cdot\tan(y)}$).