Analisi Matematica LB (31/01/2014)

Nome...Cognome... Matricola..................

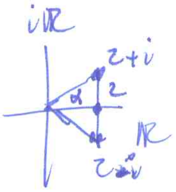
(1) [3 pt] Trovare le soluzioni complesse dell'equazione

$$(2+i)z^3 = 2-i$$

e rappresentarle sul piano complesso.

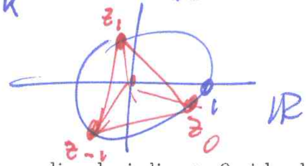
$\alpha = \operatorname{arctg}(1/2)$:

$$z^3 = \frac{2-i}{2+i} = \frac{\sqrt{5}\cdot e^{-i\alpha}}{\sqrt{5}\cdot e^{i\alpha}} = e^{-2i\alpha}$$



$$z_k = e^{(-2\alpha+2k\pi)\,i/3} = \cos\left(\frac{-2\alpha+2k\pi}{3}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{-2\alpha+2k\pi}{3}\right)$$

$k = 0, \pm 1$



(2) [3 pt] Per quali valori di $\gamma > 0$ si ha la convergenza dell'integrale

$$\int_1^\infty \frac{1-e^{-x}}{x^{2\gamma}+x^{3\gamma}}dx$$

$f(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{x^{2\gamma}+x^{3\gamma}}$; $f \in C([1,+\infty), \mathbb{R})$

$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{3\gamma}}$

L'integrale converge $\iff \gamma > 1/3$

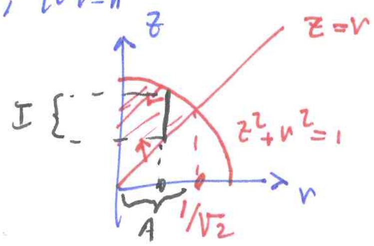
(3) [4 pti] Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme $\Omega = \{(x,y,z):\ x^2+y^2 \le z^2 \le 1-x^2-y^2,\ z \ge 0\}$. e $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ continua.

Trovare $A \subset \mathbb{R}^2$ e, per $(x,y) \in A$, trovare $I(x,y) \subseteq \mathbb{R}$, tali che

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_A \left[\int_{I(x,y)} f(x,y,z)dz\right] dxdy$$

Posti $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ r \ge 0,\ |t| \le \pi \end{cases}$ ho che $(x,y,z) \in \Omega \iff r^2 \le z^2 \le 1-r^2;\ z \ge 0;\ r \ge 0$

$\iff 0 \le r \le z$ e $z^2+r^2 \le 1$



$\begin{cases} z = r \\ z^2+r^2 = 1 \\ z \ge 0, r \ge 0 \end{cases} \Updownarrow\ z = r = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\boxed{\begin{array}{l} A = \{(x,y):\ x^2+y^2 \le 1/2\} \\ (x,y) \in A \Rightarrow I(x,y) = \left[\sqrt{x^2+y^2},\ \sqrt{1-x^2-y^2}\right] \end{array}}$$

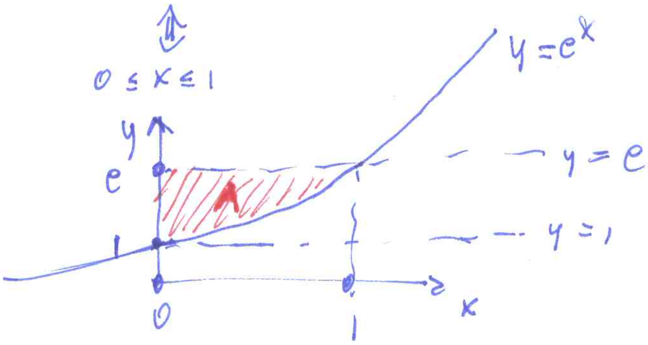
(4) [5 pti] Sia $A = \{(x,y):\ 1 \le e^x \le y \le e\} \subset \mathbb{R}^2$. Calcolare

$$\iint_A ydxdy.$$

$e^0 = 1 \le e^x \le e = e^1$

$\Updownarrow$

$0 \le x \le 1$



$$\iint_A y\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{e^x}^{e} y\,dy$$

$$= \int_0^1 dx \left(\frac{y^2}{2}\right)_{e^x}^{e} = \int_0^1 \frac{(e^1)^2-(e^x)^2}{2}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{e^2-e^{2x}}{2}dx = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^{2x}}{4}\right)_0^1$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2-1}{4} = \boxed{\frac{e^2+1}{4}}$$

(5) [3 pti] Trovare l'integrale generale di

$$y'' - 4y = \sin(2x) + e^{2x}$$

(O) Eq. omog. associata: $z'' - 4z = 0$

(C) Eq. caratteristica: $\lambda^2 - 4 = 0$

$\lambda = \pm 2$

Int. gen. dell'omogenea: $z(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$; $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

c'è "risonanza" col termine "$+ e^{2x}$":

$y(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x) + d\,x e^{2x}$

$y'(x) = -2a\sin(2x) + 2b\cos(2x) + 2d\,x e^{2x} + d e^{2x}$

$y''(x) = -4a\cos(2x) - 4b\sin(2x) + 4d e^{2x} + 4d\,x e^{2x}$

$\Rightarrow y'' - 4y = 4d e^{2x} - 8a\cos(2x) - 8b\sin(2x)$

y è soluzione $\Leftrightarrow a = 0$, $b = -1/8$, $d = 1/4$

$\boxed{y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{8}\sin(2x) + \frac{1}{4} x e^{2x}}$ è l'integrale generale.

(6) [4 pti] Siano $\alpha, \beta \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e $h \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e si definisca $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = h(\alpha(x, y, z), \beta(x, y, z)).$$

Calcolare il gradiente di f in (x, y, z).

Sia $h = h(u, v)$

$$\begin{cases} f_x(x,y,z) = h_u(\alpha(x,y,z),\beta(x,y,z))\cdot\alpha_x(x,y,z) + h_v(\alpha(x,y,z),\beta(x,y,z))\cdot\beta_x(x,y,z) \\ f_y(x,y,z) = h_u(\alpha(x,y,z),\beta(x,y,z))\cdot\alpha_y(x,y,z) + h_v(\alpha(x,y,z),\beta(x,y,z))\cdot\beta_y(x,y,z) \\ f_z(x,y,z) = h_u(\alpha(x,y,z),\beta(x,y,z))\cdot\alpha_z(x,y,z) + h_v(\alpha(x,y,z),\beta(x,y,z))\cdot\beta_z(x,y,z) \end{cases}$$

$\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$

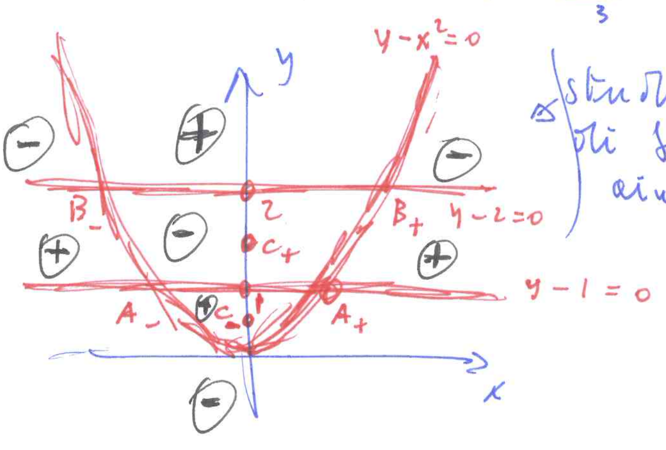
(7) [8 pti] Classificare i punti critici di $f(x, y) = (y - x^2)(y - 1)(y - 2)$.

$$\begin{cases} f_x = -2x\cdot(y-1)\cdot(y-2) = 0 \\ f_y = (y-1)(y-2) + (y-x^2)(y-2) + (y-x^2)(y-1) = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ 1 - x^2 = 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} y = 2 \\ 2 - x^2 = 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} x = 0 \\ 0 = (y-1)(y-2) + y(y-2) + y(y-1) = 3y^2 - 6y + 2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 1 \end{cases}$ o $\begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = 2 \end{cases}$ o $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{3 \pm \sqrt{9-6}}{3} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$

$\boxed{\text{i punti critici sono } \underbrace{(\pm 1, 1)}_{A_\pm},\ \underbrace{(\pm\sqrt{2}, 2)}_{B_\pm},\ \underbrace{(0, 1 \pm \tfrac{1}{\sqrt{3}})}_{C_\pm}}$



studio il segno di f, che può aiutare.

La funzione cambia di segno in $A_\pm$, $B_\pm$:

$\boxed{A_\pm \text{ e } B_\pm \text{ sono punti di sella.}}$

f ha un p.to di ~~massimo~~ minimo nella regione per T. Weierstrass; deve essere all'interno perché al bordo $f = 0$, mentre all'interno $f < 0$.

Nel punto di minimo deve essere $\nabla f = 0$ per T. Fermat. Così l'unico candidato nella regione è C_+:

$\boxed{C_+ \text{ è punto di minimo relativo.}}$

Per motivi analoghi:

$\boxed{C_- \text{ è punto di massimo relativo}}$

oppure: calcolare e studiare la matrice Hessiana.