Analisi Matematica LB (31/01/2014)

Nome.. Cognome.. Matricola.................

(1) [3 pt] Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$(z^2+2i)^2 = 2i$$

$$\begin{cases} z^2+2i = w \\ w^2 = 2i = 2e^{i\pi/2} \end{cases}$$

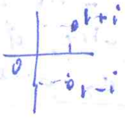
$w = \pm\sqrt{2}\cdot e^{i\pi/4} =$

$= \pm\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= \pm\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pm(1+i)$

(+) $z^2+2i = 1+i$

$z^2 = 1-i = \sqrt{1+1}\cdot e^{-\frac{\pi i}{4}}$



$z = \pm\sqrt[4]{2}\cdot e^{-\pi i/8}$

$= \boxed{\pm\sqrt[4]{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right)}$

(−) $z^2+2i = -1-i$

$z^2 = -1-3i = \sqrt{1+9}\cdot e^{i(\operatorname{arctg}(3)+\pi)}$

$z = \boxed{\pm\sqrt[4]{10}\cdot e^{i\frac{\operatorname{arctg}(3)+\pi}{2}}}$

4 soluzioni

(2) [3 pt] Per quali valori di $\gamma > 0$ si ha la convergenza dell'integrale

$$\int_1^\infty \frac{\arctan(x^\gamma)}{x^{2\gamma}+x^{3\gamma}}dx$$

$f(x) := \frac{\arctan(x^\gamma)}{x^{2\gamma}+x^{3\gamma}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi/2}{x^{3\gamma}}$: l'integrale converge se e solo se $\boxed{\gamma > 1/3}$

f è continua in $[1,+\infty)$, quindi non devo fare altro.

(3) **[4 pti]** Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme $\Omega = \{(x,y,z):\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ x+y\le z\le x+y+1\}$. e $f \in C(\Omega,\mathbb{R})$ continua.
Trovare $I = [\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$ e, per $z \in I$, trovare $A(z) \subseteq \mathbb{R}^2$, tali che

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \int_I \left[\iint_{A(z)} f(x,y,z)dxdy\right]dz$$

Per z ho $\underset{x=0=y}{0 \le x+y} \le z \le x+y+1 \underset{x=1=y}{\le} 1+1+1 = 3$: $\alpha = 0$ e $\beta = 3$

per z fissato: $A(z) = \{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ x+y\le z,\ x+y\ge z-1\}$

(4) **[5 pti]** SSia $A = \left\{(x,y):\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}\le 1\right\} \subset \mathbb{R}^2$. Calcolare

$$I = \iint_A \frac{x^2}{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}+1}dxdy.$$

$\frac{x}{3} = r\cdot\cos t$

$\frac{y}{5} = r\cdot\sin t$

$r \ge 0$

$|t| \le \pi$

$r \le 1$

$dx\,dy = 15\cdot dt\cdot r\cdot dr$

$I = 15\int_{-\pi}^{\pi} dt\cdot\int_0^1 r\,dr\cdot\frac{9\cdot r^2\cos^2 t}{r^2+1} = \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 t\,dt\cdot\int_0^1\frac{r^3}{r^2+1}dr\cdot 135$

$= 135\cdot\pi\int_0^1\frac{r^3+r-r}{r^2+1}dr = 135\cdot\pi\cdot\int_0^1\left(r - \frac{r}{r^2+1}\right)dr$

$= 135\cdot\pi\cdot\left(\frac{r^2}{2} - \frac{1}{2}\log(r^2+1)\right)\Big|_0^1 = 135\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log 2\right).$

(5) **[3 pti]** Trovare l'integrale generale di

$$y'' - y = \sin(x) + e^x$$

(0) $z'' - z = 0$: omogenea associata

$\lambda^2 - 1 = 0$: polinomio caratteristico / equazione car.: $\lambda = \pm 1$

$z(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$: integrale generale di (0).

c'è risonanza con "$+e^x$" nel termine noto:

$y(x) = a\cos x + b\sin x + d x e^x$

$y'(x) = -a\sin x + b\cos x + d e^x + d x e^x$

$y''(x) = -a\cos x - b\sin x + 2d e^x + d x e^x$

$\Longrightarrow y'' - y = 2d e^x - 2a\cos x - 2b\sin x = \sin x + e^x$

$\Longleftrightarrow a = 0,\ b = -1/2,\ d = 1/2$: l'integrale generale è

$$\boxed{y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \tfrac{1}{2} x e^x - \tfrac{1}{2}\sin x}$$

(6) **[4 pti]** Siano $\alpha, \beta \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e $h \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e si definisca $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = h(\alpha(x,y) - \beta(x,y), \alpha(x,y) \cdot \beta(x,y)).$$

Calcolare il gradiente di f in (x,y). Sia $h = h(u,v)$

$$f_x(x,y) = h_u(\alpha(x,y) - \beta(x,y), \alpha(x,y)\beta(x,y)) \cdot [\alpha_x(x,y) - \beta_x(x,y)]$$
$$+ h_v(\alpha(x,y) - \beta(x,y), \alpha(x,y)\beta(x,y)) \cdot [\alpha_x(x,y)\cdot\beta(x,y) + \alpha(x,y)\beta_x(x,y)]$$

$$f_y(x,y) = h_u(\alpha(x,y) - \beta(x,y), \alpha(x,y)\beta(x,y)) \cdot [\alpha_y(x,y) - \beta_y(x,y)]$$
$$+ h_v(\alpha(x,y) - \beta(x,y), \alpha(x,y)\cdot\beta(x,y)) \cdot [\alpha_y(x,y)\cdot\beta(x,y) + \alpha(x,y)\cdot\beta_y(x,y)]$$

(7) **[8 pti]** Classificare i punti critici di $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 4)(x - y)$.

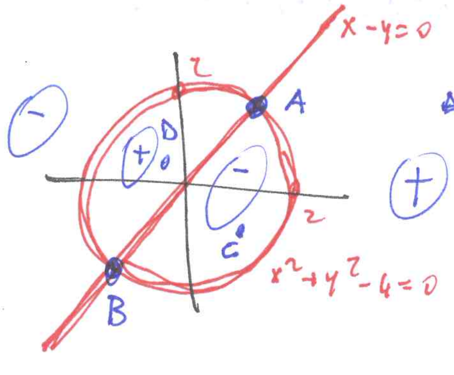
$$\begin{cases} f_x = 2x\cdot(x-y) + (x^2+y^2-4) = 0 \\ f_y = 2y(x-y) - (x^2+y^2-4) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = f_x + f_y = 2(x-y)(x+y) \\ f_x = 2x(x-y) + (x^2+y^2-4) = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2+y^2-4 = 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x = -y \\ 2x\cdot 2x + x^2 + x^2 - 4 = 6x^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 = 2 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x = -y \\ x^2 = 2/3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x = -y \\ x = \pm\sqrt{2/3} \end{cases} :$$

$$\boxed{\underset{A}{(\sqrt{2},\sqrt{2})},\ \underset{B}{(-\sqrt{2},-\sqrt{2})},\ \underset{C}{\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}},-\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)},\ \underset{D}{\left(-\sqrt{\tfrac{2}{3}},\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)}}$$

punti critici



← segno di f

$\boxed{A, B: \text{ punti di sella}}$

(la funzione cambia di segno!)

$\boxed{C: \text{ punto di min. relativo:}}$

deve essercene uno nella regione D dove la funzione è negativa (T. di Weierstrass) e lì dev'essere $\nabla f = 0$ (T. di Fermat): l'unico candidato è C.

$\boxed{D: \text{ punto di MAX. relativo,}}$

per ragioni analoghe.

Si può fare anche con lo studio dell'Hessiana.