

Test di prova per Analisi Matematica TB (8/05/2014)

Esercizi per il secondo parziale.

(1) Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, e si definisca

$$h(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)).$$

Si calcoli $\nabla h(r_0, \theta_0)$, con $(r_0, \theta_0) \in \mathbb{R}^2$. Si calcolino poi:

$$(\partial_r h(r, \theta))^2 + \left(\frac{\partial_\theta h(r, \theta)}{r} \right)^2 \text{ e } \frac{(\partial_r h(r, \theta))^2 + \left(\frac{\partial_\theta h(r, \theta)}{r} \right)^2}{\|\nabla f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))\|^2}$$

(2) Siano $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + y$, e $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1$. Trovare i valori massimo e minimo di f su $\Gamma = \{(x, y) : g(x, y) \leq 1\}$. (Servirà considerare separatamente i casi $g(x, y) < 1$ and $g(x, y) = 1$).

(3) Trovare $k \in \mathbb{R}$ di modo che il campo $F(x, y) = (\cos(x) \sinh(y), \sin(x) \cosh(y))$ sia chiuso. È anche esatto? Calcolarne in tal caso un potenziale.

(3bis) Sia $F(x, y) = \left(\frac{2x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \frac{2y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \right)$, $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Trovare un potenziale di F .