Test di prova per Analisi Matematica TB (20/05/2014)

Esercizi per il secondo parziale.

(1) Siano $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, e si definisca

$$h(r, s, t) = f(r\cos(s)\cos(t), r\cos(s)\sin(t), r\sin(s)).$$

Si calcoli $\nabla h(r_0, s_0, t_o)$, con $(r_0, s_0, t_0) \in \mathbb{R}^3$.

Facoltativo. Trovare una formula che esprima $\nabla f(r\cos(s)\cos(t), r\cos(s)\sin(t), r\sin(s)))$ in termini delle derivate parziali di h rispetto a r, s, t.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x+y$. Trovare i valori massimo e minimo di f su $K = \left\{(x, y) :\ 0 \le x \le 4,\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \ge 1\right\}$. (Servirà considerare separatamente i casi $g(x, y) < 1$ and $g(x, y) = 1$).

(3) Trovare $k \in \mathbb{R}$ di modo che il campo $F(x, y) = \left((2 + y + 2x)e^{x+2y}, (1 + ky + 4x)e^{x+2y}\right)$ sia chiuso. È anche esatto? Calcolarne in tal caso un potenziale.

(4) Calcolare:

$$\iint_A \sin(x^2)dxdy,$$

con $A = \{(x, y) :\ 0 \le y \le x \le \sqrt{\pi}\}$.

(4bis) Calcolare:

$$\iint_B xdxdy,$$

con $B = \{(x, y) :\ 0 \le y \le \sin(x^2),\ 0 \le x \le \sqrt{\pi}\}$.

① $f=f(x,y)$; $h(r,\theta)=f(r\cos\theta, r\sin\theta)$

8/5/2014
svolto

$$\begin{cases}\partial_r h(r,\theta)=\partial_x f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot\cos\theta+\partial_y f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot\sin\theta\\ \partial_\theta h(r,\theta)=-\partial_x f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot r\sin\theta+\partial_y f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot r\cos\theta\end{cases}$$

$\nabla h=(\partial_r h,\partial_\theta h)$

$$\partial_r h(r,\theta)^2+\frac{\partial_\theta h(r,\theta)^2}{r^2}=\partial_x f(r\cos\theta,r\sin\theta)^2\cdot(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$$
$$+\partial_y f(r\cos\theta,r\sin\theta)^2\cdot(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$$
$$+\partial_x f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot\partial_y f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot(\cos\theta\sin\theta-\cos\theta\sin\theta)$$
$$=\partial_x f(r\cos\theta,r\sin\theta)^2+\partial_y f(r\cos\theta,r\sin\theta)^2=\|\nabla f(r\cos\theta,r\sin\theta)\|^2$$

$$\boxed{\frac{\partial_r h(r,\theta)^2+\dfrac{\partial_\theta h(r,\theta)^2}{r^2}}{\|\nabla f(r\cos\theta,r\sin\theta)\|^2}=1}$$

② $\mathbb{R}^2\xrightarrow{f}\mathbb{R}$; $f(x,y)=x+y$; $g(x,y)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1$; $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$\Gamma=\{(x,y): g(x,y)\le 1\}=\{(x,y): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 2\}=\{(x,y): \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{18}\le 1\}$.

Su $A=\{(x,y): g(x,y)<1\}$, che è aperto, calcolo $\nabla f(x,y)=(1,1)\neq(0,0)$ $\forall(x,y)\in A$: non ci sono punti di MAX./min. relativo.

Su $\partial\Gamma=\{(x,y): g(x,y)=1\}$ uso i moltiplicatori di Lagrange:

$$\begin{cases}g(x,y)=1; & \text{cioè} & \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{18}=1\\ \partial_x f(x,y)=\lambda\cdot\partial_x g(x,y); & \text{cioè} & 1=\lambda\cdot x/4\\ \partial_y f(x,y)=\lambda\cdot\partial_y g(x,y); & \text{cioè} & 1=\lambda\cdot y/9\end{cases}$$

(A) $\begin{cases}\frac{x}{4}=\frac{1}{\lambda}=\frac{y}{9}\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{18}=1\\ \lambda\neq 0\end{cases}$ oppure (B) $\begin{cases}\lambda=0\\ \text{imp.}\end{cases}$

(A) $\begin{cases}x=\frac{4}{9}y\\ \frac{1}{8}\left(\frac{4}{9}\right)^2y^2+\frac{y^2}{18}=y^2\left(\frac{2}{9^2}+\frac{1}{9\cdot 2}\right)=y^2\cdot\frac{4+9}{9^2\cdot 2}=y^2\cdot\frac{13}{9^2\cdot 2}=1\end{cases}$ $\begin{cases}x=\pm 4\sqrt{\frac{2}{13}}\\ y=\pm 9\sqrt{\frac{2}{13}}\end{cases}$

$f\left(4\sqrt{\frac{2}{13}},9\sqrt{\frac{2}{13}}\right)=\sqrt{26}$ e $f\left(-4\sqrt{\frac{2}{13}},-9\sqrt{\frac{2}{13}}\right)=-\sqrt{26}$

$\boxed{\text{MAX}\{f(x,y):(x,y)\in\Gamma\}=\sqrt{26}}$; $\boxed{\min\{f(x,y):(x,y)\in\Gamma\}=-\sqrt{26}}$

③ Ricordo che $\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ e $\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ sono le funzioni seno e coseno iperbolico. e $\begin{cases}\frac{d}{dx}\sinh(x)=\cosh(x)\\ \frac{d}{dx}\cosh(x)=\sinh(x)\end{cases}$

$F(x,y)=(\cos(x)\cdot\sinh(y),\ \underline{k}\cdot\sin(x)\cdot\cosh(y))$: avevo dimenticato di scrivere k.
$=(P(x,y),Q(x,y))$.

$\partial_y P=\cos(x)\cosh(y)\overset{?}{=}\partial_x Q=k\cdot\cos(x)\cosh(y)\iff k=1$. Quindi F è esatto se $k=1$.

$\varphi(x,y)=\int\cos(x)\sinh(y)\,dx=\sin(x)\sinh(y)+A(y)$ e

$\partial_y\varphi(x,y)=\sin(x)\cosh(y)+A'(y)\overset{?}{=}Q(x,y)=\sin(x)\cdot\cosh(y)\iff A'(y)=0\ \forall y$:

$\boxed{\varphi(x,y)=\sin(x)\cdot\sinh(y)+A;\ A\in\mathbb{R};\ \varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ \text{sono i potenziali di } F.}$

3 bis $F=\nabla\varphi$ e dovrebbe essere $\varphi(x,y)=f(x^2+y^2)$ per qualche $f\in C^1([0,+\infty),\mathbb{R})$.

Conti $\Rightarrow$ $\boxed{\varphi(x,y)=\sqrt{1+x^2+y^2}+A;\ A\in\mathbb{R};\ \text{sono i potenziali.}}$