Prova scritta di Analisi Matematica TB (09/06/2014)

Nome .... Cognome .... Matricola ....

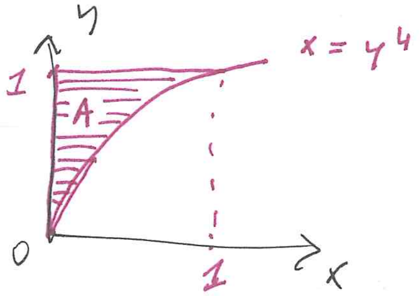
Preferisco sostenere la prova orale: inizio appello (13/06/2014) - fine appello (cancellare quella che non interessa)

Di ogni esercizio che non sia a risposta multipla, riportare i passaggi essenziali che portano alla soluzione.

(1) Calcolare l'integrale

$$I = \iint_A x \arctan\left(y^9\right) dxdy$$

dove $A = \{(x, y) :\ 0 \leq x \leq y^4 \leq 1\}$.



$$A = \{(x,y) :\ 0 \le y \le 1 \ \text{e} \ 0 \le x \le y^4\}$$

$$I = \int_0^1 \left\{ \int_0^{y^4} x \cdot \arctan(y^9)\, dx \right\} dy$$

$$= \int_0^1 \arctan(y^9) \left(\frac{x^2}{2}\right)_0^{y^4} dy$$

$$= \int_0^1 \arctan(y^9) \cdot \frac{y^8}{2}\, dy \underset{z = y^9}{=} \int_0^1 \arctan(z)\, \frac{dz}{2 \cdot 9}$$

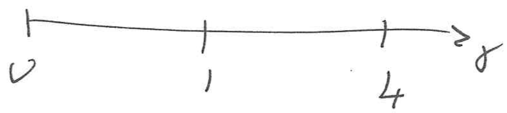
$$\overset{\text{I.P.}}{=} \frac{1}{18} \left\{ \left(z \cdot \arctan(z)\right)_0^1 - \int_0^1 \frac{z}{1+z^2}\, dz \right\} =$$

$$= \frac{1}{18} \cdot \left\{ \arctan(1) - \frac{1}{2} \left(\log(1+z^2)\right)_0^1 \right\} = \frac{1}{18} \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log(2)\right]$$

(2) Per quali valori del parametro $\gamma > 0$ converge assolutamente l'integrale

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{x + x^\gamma}{x^4 + x^\gamma} dx?$$

$$f(x) = \frac{x + x^\gamma}{x^4 + x^\gamma} \underset{x \to 0}{\sim} \begin{cases} \dfrac{1}{x^3} & \text{se } \gamma > 4 \\ \dfrac{1}{x^{\gamma - 1}} & \text{se } 1 \le \gamma \le 4 \\ 1 & \text{se } 0 < \gamma < 1 \end{cases}$$



$$\int_0^1 f(x)\,dx \text{ converge se}$$

$$0 < \gamma < 1 \text{ o se } \begin{cases} 1 \le \gamma \le 4 \\ \gamma - 1 < 2 \end{cases}$$

$$\text{sse } \boxed{0 < \gamma < 2}$$

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \begin{cases} \dfrac{1}{x^3} & \text{se } 0 < \gamma < 1 \\ \dfrac{1}{x^{4-\gamma}} & \text{se } 1 \le \gamma \le 4 \\ 1 & \text{se } \gamma > 4 \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge se } \begin{cases} 0 < \gamma < 1 \\ 1 \le \gamma \le 4 \text{ e } 4 - \gamma > 1 \end{cases} \quad \text{sse } 0 < \gamma < 3$$

$$\boxed{J \text{ converge} \iff 0 < \gamma < 2}$$

(3) Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione:

$$(z^3-2i)^2-2(z^3-2i)+2=0.$$

Posto $w=z^3-2i$: $\quad w^2-2w+2=0 \qquad \frac{\Delta}{4}=1-2=-1=i^2$

$w=1\pm i$

① $z^3-2i=1+i \qquad z^3=1+3i=\sqrt{1+9}\cdot e^{i\,\mathrm{arctg}(3)}$

$$z=\sqrt[6]{10}\cdot\left[\cos\left(\frac{\mathrm{arctg}(3)+2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\mathrm{arctg}(3)+2k\pi}{3}\right)\right]$$

con $k=0,\pm1$

② $z^3-2i=1-i;\ z^3=1+i=\sqrt{2}\cdot e^{i\pi/4}$

$$z=\sqrt[6]{2}\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right] \qquad \text{con } k=0,\pm1$$

6 soluzioni

(4) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale del II ordine

$$(E) \qquad \ddot{x}-2\dot{x}+17x=\frac{\cos(4t)}{4}$$

(EO) $\ddot{z}-2\dot{z}+17\cdot z=0$

$\lambda^2-2\lambda+17=0 \qquad \frac{\Delta}{4}=1-17=-16=i^2\cdot\sqrt{16}^2=i^2\cdot4^2$

$\lambda=1\pm i\,4$

$z(t)=(a\cdot\cos(4t)+b\cdot\sin(4t))\cdot e^t \quad$ con $a,b\in\mathbb{R}$

è l'int. gen. di (EO).

Provo con $x(t)=c\cdot\cos(4t)+d\cdot\sin(4t)$

$\dot{x}(t)=-4c\cdot\sin(4t)+4d\cdot\cos(4t)$

$\ddot{x}(t)=-16c\cdot\cos(4t)-16d\cdot\sin(4t)$

Sostituisco in (E):

$$\frac{\cos(4t)}{4}=\ddot{x}-2\dot{x}+17x=$$

$$=\cos(4t)\{-16c-2\cdot4d+17\cdot c\}$$

$$+\sin(4t)\cdot\{-16d-2\cdot(-4c)+17\cdot d\}$$

$$=\cos(4t)\cdot\{-8d+c\}+\sin(4t)\cdot\{d+8c\}:$$

x è soluz. $\Leftrightarrow \begin{cases} d+8c=0 \\ c-8d=\frac{1}{4}\end{cases} \quad \begin{cases} d=-8c \\ 65\cdot c=\frac{1}{4}\end{cases} \quad \begin{cases} c=\frac{1}{260} \\ d=-\frac{8}{260}\end{cases}$

$x(t)=\frac{1}{260}\cdot\cos(4t)-\frac{8}{260}\cdot\sin(4t)+(a\cdot\cos(4t)+b\cdot\sin(4t))\cdot e^t$ è l'int. gen

(5) Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e sia

$$h(x,y) = f(2x+3y, 3x-2y).$$

Calcolare $\nabla h(x,y)$ e trovare $k \in \mathbb{R}$ tale che $\|\nabla h(x,y)\|^2 = k\|(\nabla f)(2x+3y, 3x-2y)\|^2$.

Sia $f = f(u,v)$: con $u = 2x+3y$ e $v = 3x-2y$

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_x h(x,y) &= \partial_u f(u,v)\cdot 2 + \partial_v f(u,v)\cdot 3 \\ \partial_y h(x,y) &= \partial_u f(u,v)\cdot 3 - \partial_v f(u,v)\cdot 2 \end{aligned}}$$

$$\|\nabla h(x,y)\|^2 = \left(\partial_u f(u,v)\cdot 2 + \partial_v f(u,v)\cdot 3\right)^2 + \left(\partial_u f(u,v)\cdot 3 - \partial_v f(u,v)\cdot 2\right)^2$$

$$= \partial_u f(u,v)^2\cdot 2^2 + 2\cdot 3\cdot 2\cdot \partial_u f(u,v)\cdot \partial_v f(u,v) + \partial_v f(u,v)^2\cdot 3^2 + 3^2\,\partial_u f(u,v)^2 - 3\cdot 2\cdot 2\cdot \partial_u f(u,v)\,\partial_v f(u,v) + \partial_v f(u,v)^2\cdot 2^2$$

$$= (2^2+3^2)\cdot \partial_u f(u,v)^2 + (3^2+2^2)\cdot \partial_v f(u,v)^2$$

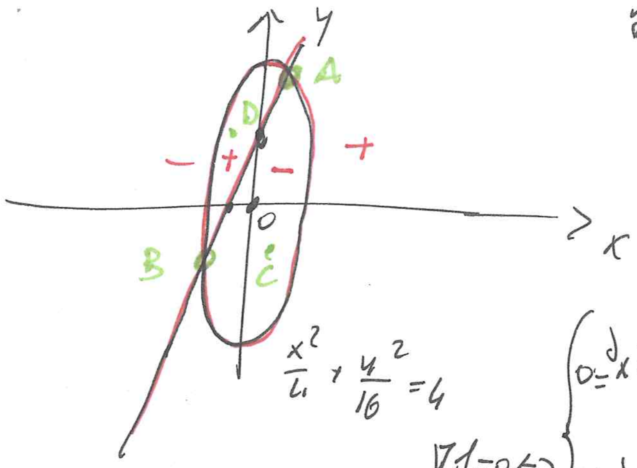
$$= 13\cdot \|(\nabla f)(u,v)\|^2$$

$$= 13\cdot \|(\nabla f)(2x+3y, 3x-2y)\|^2 :$$

$k = 13$

(6) Classificare i punti critici della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} - 4\right) \cdot (4x - 2y + 8)$$



$f(0,0) < 0$: studio il segno di f

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} 0 = \partial_x f = \frac{2x}{4}(4x-2y+8) + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} - 4\right) \cdot 4 \\ 0 = \partial_y f = \frac{2y}{16}(4x-2y+8) + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} - 4\right)\cdot(-2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 4x - 2y + 8 = 0 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 4 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} y = 2x + 4 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{(2x+4)^2}{16} - 4 = 0 \\ \quad \parallel \\ \frac{x^2}{4} + \frac{(x+2)^2}{4} - 4 \\ \quad \parallel \\ \frac{2x^2 + 4x + 4 - 16}{4} \\ \quad \parallel \\ \frac{1}{2}(x^2 + 2x - 6) \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x = -1 \pm \sqrt{7} \\ y = 2x + 4 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$(x,y) = (-1+\sqrt{7}, 2+2\sqrt{7}) = A$ sella

o $(-1-\sqrt{7}, 2-2\sqrt{7}) = B$ sella

oppure
$$\begin{cases} 0 = \partial_x f + 2 \cdot \partial_y f = \left(\frac{2x}{4} + 2 \cdot \frac{2y}{16}\right)(4x - 2y + 8) \\ \text{con } 4x - 2y + 8 \neq 0 \\ \frac{2x}{4}(4x - 2y + 8) + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} - 4\right)4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 0 \\ \frac{2x}{4}(4x - 2y + 8) + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} - 4\right)4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x \\ \frac{x}{2}(4x + 4x + 8) + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{4x^2}{16} - 4\right)4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x \\ x^2\left(4 + \frac{4}{2}\right) - x \cdot 4 - 16 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x \\ \frac{3}{2}x^2 - x - 4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -2x \\ 3x^2 - 2x - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{3} = \frac{1 \pm 5}{3} = 2, -\frac{4}{3}. \\ y = -2x \end{cases}$$

$(x,y) = (2,-4), \left(-\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$

$(2,-4) = C \to$ pto min rel.

$\left(-\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right) = D \to$ pto MAX rel.

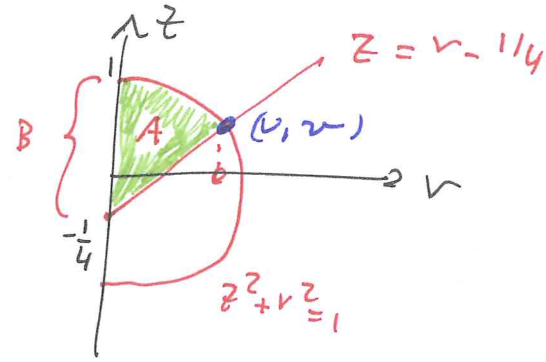
classificazione: col segno.

(7) Sia $f \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ e sia $A = \{(x, y, z) : \ x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \text{ e } \sqrt{x^2 + y^2} \le z + \frac{1}{4}\}$. Trovare $B = \{z : \text{ esiste } (x, y, z) \in A\}$ e, per $z \in B$, trovare $A_z \subseteq \mathbb{R}^2$ di modo che

$$\iiint_A f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_B \left(\iint_{A_z} f(x, y, z)\,dx\,dy \right) dz.$$

Pongo $x^2+y^2=r^2$ con $r\ge 0$: $(x,y,z)\in A \iff$

$$\begin{cases} r^2+z^2\le 1 \\ r\le z+\frac14 \end{cases}$$



$$\begin{cases} r^2+z^2=1 \\ r=z+\frac14 \end{cases} \quad \begin{cases} \left(z+\frac14\right)^2+z^2=1 \\ r=z+\frac14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2z^2+\frac12 z+\frac1{16}-1=0 \\ r=z+\frac14 \end{cases} \quad \begin{cases} 4z^2+z-30=0 \\ r=z+\frac14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=\dfrac{-1\pm\sqrt{481}}{8} \\ r=\dfrac{-1\pm\sqrt{481}}{8}+\dfrac14 \end{cases}$$

accetto solo $+$: $\begin{cases} r=\dfrac{1+\sqrt{481}}{8} \\ z=\dfrac{-1+\sqrt{481}}{8} \end{cases}$

$B=\left[-\frac14, 1\right]$

$\forall z\in\left[-\frac12, \frac{-1+\sqrt{481}}{8}\right] \Rightarrow A_z=\left\{(x,y): \sqrt{x^2+y^2}\le z+\frac14\right\}$

$\forall z\in\left[\frac{-1+\sqrt{481}}{8}, 1\right] \Rightarrow A_z=\left\{(x,y): x^2+y^2\le 1-z^2\right\}$.

AMTB- PARZ

(3) Per quali valori dei parametro k il campo vettoriale

$$F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = \left(\frac{k}{25y^2+1} + 2, \frac{-100y\,x}{(25y^2+1)^2} + 5\right)$$

è esatto? Calcolarne un potenziale.

$$\partial_y P(x,y) = k \cdot \frac{-25 \cdot 2y}{(25y^2+1)^2} = \frac{-50 \cdot y}{(25y^2+1)^2} \cdot k$$

$$\partial_x Q(x,y) = \frac{-100y}{(25y^2+1)^2} = \frac{-100 \cdot y}{(25y^2+1)^2}$$

F chiuso $\Leftrightarrow$ F esatto $\Leftrightarrow$ $k = 2$:

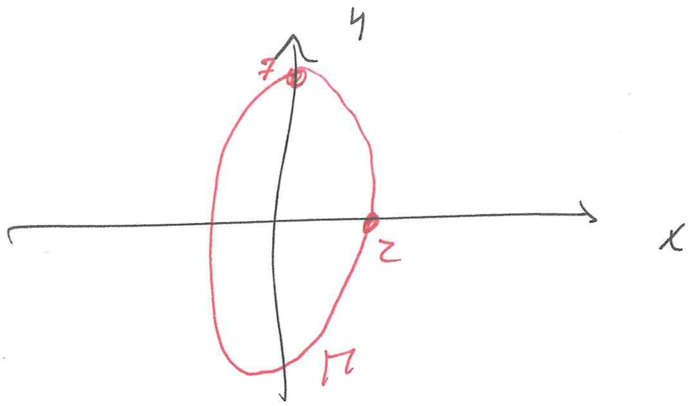
$$\varphi(x,y) = \int P(x,y)\,dx = \frac{2x}{25y^2+1} + 2x + A(y)$$

e $Q(x,y) = \partial_y \varphi(x,y) = \dfrac{-100xy}{(25y^2+1)^2} + A'(y) \Leftrightarrow A'(y) = 5$:

$$\boxed{\varphi(x,y) = \frac{2x}{25y^2+1} + 2x + 5y + A \quad (A \in \mathbb{R})}$$

sono i potenziali di F

(5) Sia $\Gamma = \left\{(x,y):\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{49} - 1 = 0\right\}$ e sia $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$ per $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Trovare $M = \max\{f(x,y):\ (x,y) \in \Gamma\}$ e $m = \min\{f(x,y):\ (x,y) \in \Gamma\}$.



$$g(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{49} - 1$$

$$\begin{cases} 0 = \partial_x f - \lambda \partial_x g = 2(x-1) - \lambda \cdot \frac{2x}{4} \\ 0 = \partial_y f - \lambda \partial_y g = 2y - \lambda \cdot \frac{2y}{49} = 2y\left(1 - \frac{\lambda}{49}\right) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{49} = 1 \end{cases}$$

inizia qui

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \lambda = 49 \\ 2(x-1) = 49 \cdot \frac{2x}{4} \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{49} = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{f(\pm 2, 0) = 1, 9}$$

$$\begin{cases} 2x\left(\frac{49}{4} - 1\right) = -2 \quad \text{cioè} \quad x = -\frac{4}{45} \\ y^2 = 49 \cdot \left(1 - \left(\frac{4}{45}\right)^2 \cdot \frac{1}{4}\right) \end{cases}$$

$$f\left(-\frac{4}{45};\ \pm 7\left(1 - \left(\frac{4}{45}\right)^2 \frac{1}{4}\right)^{1/2}\right)$$

$$= \boxed{\left(1 + \frac{4}{45}\right)^2 + 49\left(1 - \left(\frac{4}{45}\right)^2 \frac{1}{4}\right)} = \left(1 + \frac{4}{45}\right)^2 + 49\left(1 - \frac{4}{45^2}\right)$$

$$> 9$$

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{Max} f &= \left(1 + \frac{4}{45}\right)^2 + 49\left(1 - \frac{4}{45^2}\right) \\ \min f &= 1 \end{aligned}}$$

Prova di Analisi Matematica I (09/06/2014)

Nome..Cognome... Matricola.................
Preferisco sostenere la prova orale: inizio appello (13/06/2014) - fine appello (cancellare quella che non interessa)

Di ogni esercizio che non sia a risposta multipla, riportare i passaggi essenziali che portano alla soluzione.

(1) **[5 pti]** Calcolare l'integrale:

$$I = \int_0^a \frac{\log\left(1 + \arctan\left(\frac{x}{a}\right)\right)}{x^2 + a^2} dx$$

Posto $y = \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$:

$$dy = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} \cdot \frac{1}{a} dx = \frac{a}{x^2 + a^2} dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{a} \int_{\arctan(0)=0}^{\arctan(a/a) = \arctan(1) = \pi/4} \log(1+y) \, dy$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \left\{ \left[(y+1) \log(1+y) \right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \frac{y+1}{y+1} dy \right\} =$$

$$= \frac{1}{a} \left\{ \left(\frac{\pi}{4} + 1\right) \log\left(\frac{\pi}{4} + 1\right) - \frac{\pi}{4} \right\} = I$$

(2) **[5 pti]** Calcolare il limite

$$L = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-4x^2} - \cos^2(2x)}{x^2 \cos(2x) \sin^2(2x)}.$$

Denom $\underset{x \to 0^+}{\sim} x^2 \cdot 1 \cdot (2x)^2 = 4x^4$: sviluppo Numer all'ordine 4: Numer $= 1 - 4x^2 + \frac{(4x^2)^2}{2} + o(x^4)$

~~$\left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)\right)^2 = 1 - 4x^2 + 8x^4 + o(x^4) - 1$~~

$- \left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{4!} + o(x^4)\right)^2 = 1 - 4x^2 + 8x^4 - \left(1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4\right)^2 + o(x^4)$

$= 1 - 4x^2 + 8x^4 - \left(1 - 4x^2 + 4x^4 + \frac{4}{3}x^4 + o(x^4)\right) + o(x^4)$

$= x^4\left(8 - 4 - \frac{4}{3}\right) + o(x^4) \Rightarrow L = \frac{8 - 4 - 4/3}{4} = 2 - 1 - 1/3 = 2/3$

(3) **[2 pti]** Trovare le soluzioni complesse dell'equazione

$$(z^3 - ai)^2 + (z^3 - ai) - 2 = 0.$$

e rappresentarle sul piano complesso.

$z^3 - ai = w$! $\quad w^2 + w - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; (w+2)(w-1)$

$w = -2, 1$

$z^3 - ai = -2 \qquad z^3 = -2 + ai = \sqrt{4+a^2} \cdot e^{i\left(\arctan\left(\frac{a}{-2}\right) + \pi\right)}$

$z = \sqrt[6]{4+a^2} \cdot e^{i \frac{\arctan\left(\frac{a}{-2}\right) + \pi + 2k\pi}{3}}$

$k = 0, \pm 1$

$z^3 - ai = 1$

$z = \sqrt[6]{1+a^2} \cdot e^{i \frac{\arctan(-a) + 2k\pi}{3}}$

$k = 0, \pm 1$

(4) [8 pti] Studiare la funzione

$$f(x) = e^{-\left|\frac{x^2-8x+12}{x-4}\right|}$$

e tracciarne il grafico. In particolare, trovare: (i) il dominio *Dominio*(f) di f; (ii) gli intervalli su cui f è continua; (iii) i limiti di f agli estremi di questi intervalli; (iv) la derivata f' di f e il suo dominio; (v) gli intervalli su cui f cresce o decresce; (vi) i punti di massimo e minimo relativo di f.

$\text{Dominio}(f) = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to 4} f(x)$$

$f(x) > 0 \ \forall x \in \text{Dominio}(f)$.

$$\forall x: \ \frac{x^2-8x+12}{x-4} \neq 0 \Rightarrow \exists f'(x) = -e^{-\left|\frac{x^2-8x+12}{x-4}\right|} \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{x^2-8x+12}{x-4}\right) \cdot \frac{(2x-8)(x-4)-(x^2-8x+12)}{(x-4)^2}$$

$$= -e^{-|0|} \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{x^2-8x+12}{x-4}\right) \cdot \frac{x^2-8x+20}{(x-4)^2}$$

Segno di $f'(x)$: $x-4>0$ se $x>0$

$x^2-8x+12 = (x-4)^2-4 > 0 \iff x-4<-2$ o $x-4>2$

$x<2$ o $x>4$

$x^2-8x+20 = (x-4)^2+4 > 0 \ \forall x$

		2		4		6	
$(-1)>0$	– – –		– –		– –		–
$x-4>0$	– – –		– –		———		———
$x^2-8x+12>0$	———		- - -		- - -		———
	+		–		+		–

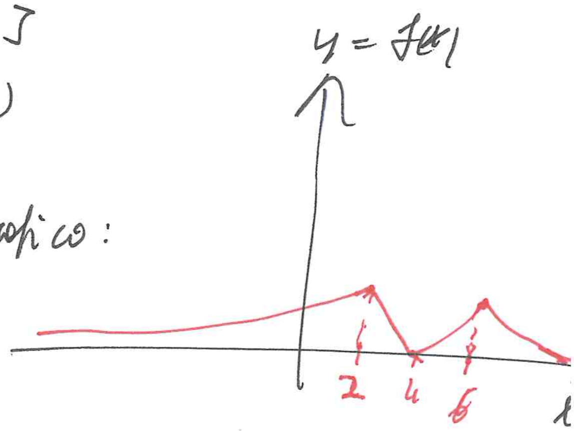
f cresce in $(-\infty, 2]$ e $(4, 6]$

decresce in $[2, 4)$ e $[6, +\infty)$

$x = 2, 6$: pti max. rel.

$\text{Dominio}(f') = \mathbb{R} \setminus \{4, 2, 6\}$

Grafico:



(7) [4 pti] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e si definisca $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \frac{f(x^2+5x)}{1+f(x)^2}.$$

Calcolare $h'(x)$ per x in $\mathbb{R}$.

$$h'(x) = \frac{f'(x^2+3x)(2x+5)\cdot(1+f(x)^2) - f(x^2+5x)\cdot 2f(x)f'(x)}{(1+f(x)^2)^2}$$

(5) **[3 pti]** Siano $f, g : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ funzioni continue e si supponga che $f(-2) = g(2) = -2$, $g(-2) = f(2) = 2$. Quale delle seguenti affermazioni segue *necessariamente* dalle ipotesi su f e g?

- Falso • Esiste x in $(-2, 2)$ tale che $f'(x) + g'(x) = 0$. f, g possono non essere derivabili
- Falso • $f + g$ ha massimo in $(-2, 2)$. Il max. può essere $(f+g)(2) = (f+g)(-2) = 0$
- Vero • Esiste x in $(-2, 2)$ such that $f(x) \cdot g(x) = 0$. per T. zeri applicato a f (o g).
- Falso • Esiste x in $(-2, 2)$ such that $f(x) + g(x) = 0$. $f+g$ vale 0 in $x = \pm 2$, nessuno dice che ciò valga in $(-2, 2)$...

(6) **[3 pti]** **Calcolare il limite di successione**

$$L = \lim_{n\to\infty} \left(e\frac{2^{2n+1} + n^4}{4^n + n^2} + \pi\frac{4^{n+1} + n^2}{4^n + n^4} + \sqrt{2}\frac{3^n \cdot n^5}{4^n - n^4} \right) = \lim_{n\to\infty} e_n \text{ con}$$

$$e_n = e \cdot \frac{4^n \cdot 2 + n^4}{4^n + n^2} + \pi \cdot \frac{4^n \cdot 4 + n^2}{4^n + n^4} + \sqrt{2} \cdot \frac{3^n \cdot n^5}{4^n - n^4}$$

$$= e \cdot \cancel{\frac{4^n}{4^n}} \cdot \frac{2 + n^4/4^n}{1 + n^2/4^n} + \pi \cdot \cancel{\frac{4^n}{4^n}} \cdot \frac{4 + n^2/4^n}{1 + n^4/4^n} + \sqrt{2} \cdot \frac{\cancel{4^n} \cdot \frac{3^n \cdot n^5}{4^n}}{\cancel{4^n} \cdot 1 - \frac{n^4}{4^n}}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 2e + 4\pi + 0$$

$$L = 2e + 4\pi$$