

SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Anno Accademico 2009-10

Nicola Arcozzi

CAPACITÀ D'INSIEMI SU ALBERI, GRAFI E SPAZI METRICI
AHLFORS-REGOLARI

3 giugno 2010

ABSTRACT

Work in collaboration with R. Rochberg E. Sawyer and B. Wick [ARSW]. We show that the potential theory of Bessel-type kernels on Ahlfors-regular metric spaces is equivalent, in a precise sense, to potential theory on trees. The basis of this work was in [ARS2], where the relationship between discrete potential theory and some classical function theory was considered. Some applications [Ar] to estimation of sets' and condenser's capacity are discussed.

INDICE

Abstract	2
1. Gli spazi metrici Ahlfors-regolari; grafi ed alberi ad essi associati	6
1.1. Il teorema di M. Christ	8
1.2. Lo spazio X come bordo di G	10
1.3. L'albero T e il suo bordo come spazi metrici Ahlfors-regolari	11
1.4. La mappa $\Lambda : \partial T \rightarrow X$ e il Teorema di Discretizzazione per le Capacità	12
2. La disuguaglianza di Muckenhoupt-Wheeden e di Wolff sui grafi	16
3. Equivalenza delle capacità d'insieme su X , ∂G e ∂T	18
4. Alcune applicazioni	19
4.1. Una capacità logaritmica su $T \cup \partial T$.	20
4.2. Un'applicazione alla capacità dei condensatori in \mathbb{R}^2 .	21
Riferimenti bibliografici	22

La nozione di capacità di un insieme nasce in elettrostatica. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme compatto (un *conduttore*) e sia μ una distribuzione positiva di carica su E (una misura di Borel con supporto in E). Il *potenziale elettrostatico* generato da μ in $x \in \mathbb{R}^n$ è:

$$k\mu(x) = \int k(x-y)d\mu(y),$$

dove

$$k(x-y) = \begin{cases} \log \frac{1}{|x-y|}, & \text{se } n = 2; \\ |x-y|^{2-n} & \text{se } n > 2. \end{cases}$$

I casi di diretto interesse fisico sono $n = 3$ (lo spazio usuale) e $n = 2$ (caso di distribuzione uniforme “per fili”). La capacità di E è la carica massima $\mu(E)$ che il conduttore può supportare mantenendo il potenziale $k\mu$ (uniformemente) al di sotto di una soglia assegnata ($k\mu(x) \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}^n$, diciamo):

$$\text{Cap}(E) := \sup\{\mu(E) : k\mu \leq 1 \text{ on } \mathbb{R}^n\}.$$

L'idea è più o meno questa. Mettiamo una distribuzione di carica ν su E e lasciamo che i singoli “protoni” -ci obbliga a questa strana fisica la scelta di avere $\nu \geq 0$ - si muovano liberamente nel conduttore (seguendo dei sottilissimi collegamenti tra le sue componenti connesse, se necessario) finché non raggiungono una configurazione d'equilibrio $\tilde{\nu}$, con $\tilde{\nu}(E) = \nu(E)$ (conservazione della carica!). Se $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} k\tilde{\nu}(x) = C$, otteniamo la soluzione del problema estremale ponendo $\mu = \tilde{\nu}/C$ e si ha $\text{Cap}(E) = \nu(E)/C$.

È intuitivo (e dimostrabile) che il potenziale abbia il suo massimo in qualche punto sulla frontiera del conduttore (rigorosamente, ciò segue dal classico principio del massimo per le funzioni armoniche).

Nel caso in cui $n > 2$, *la stessa distribuzione* μ è soluzione anche di un altro problema estremale; quello di massimizzare, cioè, la carica $\mu(E)$ in modo che sia limitata l'energia $\mathcal{E}(\mu)$ generata dalla distribuzione:

$$\text{Cap}(E) := \sup\{\mu(E)^2 : \text{supp}(\mu) \subseteq E, \mathcal{E}(\mu) \leq 1 \text{ on } \mathbb{R}^n\},$$

dove

$$\mathcal{E}(\mu) = \int_{\mathbb{R}^n} (k\mu)^2(x)dx.$$

Usando la diversa omogeneità delle quantità coinvolte,

$$\text{Cap}(E) = \sup \left\{ \frac{\mu(E)^2}{\mathcal{E}(\mu)} : \text{supp}(\mu) \subseteq E \right\}.$$

Esistono altri problemi estremali che coinvolgono cariche aventi supporto in un compatto fissato E , per cui si ha la stessa la stessa soluzione numerica $\text{Cap}(E)$ e la stessa distribuzione estrema μ . Rimando a [AH] per un'esposizione molto generale e al tempo stesso dettagliata della teoria.

La teoria del potenziale e la sua sottoteoria che si occupa di capacità hanno da tempo oltrepassato i confini dell'elettrostatica, per entrare a pieno titolo in altri campi della matematica e delle sue applicazioni. Cito alcuni esempi.

- (1) *Teoria delle equazioni differenziali lineari alle derivate parziali ellittiche*, per quanto riguarda la regolarità dei punti al bordo di un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, in cui si vuole risolvere un problema di Dirichlet (test di Wiener).
- (2) *Teoria dei processi stocastici*: gli insiemi di capacità nulla sono quelli evitati, a meno di probabilità nulla, da un moto browniano (teorema di Kakutani).
- (3) *Spazi di Sobolev*: una funzione nello spazio di Sobolev

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n) : \nabla\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)\},$$

con $1 < p < n$, sono definite a meno di un insieme di p -capacità nulla ($\nabla\varphi$ è qui inteso come gradiente distribuzionale di φ).

- (4) *Teoria delle mappe conformi*: la *capacità di un condensatore* è un invariante conforme,

$$\text{Cap}(f(E), f(F)) = \text{Cap}(E, F),$$

dove $\text{Cap}(E, F)$ ha una definizione elettrostatica su cui non ci soffermiamo.

- (5) *Teoria delle mappe quasi-conformi in \mathbb{R}^n , $n \geq 3$* : la teoria inizia ha alla base considerazioni riguardo a capacità non lineari.

La capacità d'insiemi è subadditiva, ma non è additiva. Siano A e B due insiemi disgiunti in \mathbb{R}^n e si considerino distribuzioni μ su A e ν su B . Si consideri poi la distribuzione $\mu + \nu$, che soddisfa $(\mu + \nu)(A \cup B) = \mu(A) + \nu(B)$. Si verifica facilmente

(esercizio!) che:

$$\frac{(\mu(A) + \nu(B))^2}{\mathcal{E}(\mu + \nu)} \leq \frac{\mu(A)^2}{\mathcal{E}(\mu)} + \frac{\nu(B)^2}{\mathcal{E}(\nu)} \leq \text{Cap}(A) + \text{Cap}(B),$$

quindi, passando al sup su $\mu + \nu$, otteniamo che $\text{Cap}(A \cup B) \leq \text{Cap}(A) + \text{Cap}(B)$.

Nell'altra direzione, possiamo fare un ragionamento euristico. Se la capacità fosse una funzione addittiva e positiva d'insiemi, sarebbe una misura (escludo paradossali “conduttori di Banach-Tarski”). Essendo il potenziale invariante per isometrie di \mathbb{R}^n , così sarebbe la misura Cap . Considero ora due cubi uguali e ugualmente carichi elettricamente, β_0 e β_1 , che siano abbastanza distanti tra loro affinché le cariche su β_0 abbiano effetto trascurabile sul potenziale nei punti vicini a β_1 , e viceversa. Avvicino ora β_1 a β_0 : le cariche su β_1 cominciano a esercitare una forza su quelle in β_0 ed è necessario che il potenziale (rimanendo le cariche ferme all'interno dei conduttori) inizi a crescere in ogni punto della frontiera di β_0 . Le cariche si sposteranno quindi dalla loro configurazione d'equilibrio, aumentando comunque il potenziale in qualche porzione di ciascun conduttore. Per mantenere il potenziale al di sotto della quota assegnata, dovremmo quindi diminuire la carica su β_0 e su β_1 : la capacità del conduttore composto da β_0 e β_1 è *strettamente* diminuita all'avvicinarsi delle sue parti. (Questo ragionamento qualitativo ha alla sua base l'*unicità* della configurazione d'equilibrio).

La realtà delle cose va ben al di là di questa semplice euristica: esistono insiemi compatti (che hanno quindi capacità finita) aventi la stessa capacità (positiva), ma dimensioni di Hausdorff diverse. In \mathbb{R}^3 , per esempio, sia un disco (bidimensionale) che una palla (tridimensionale) hanno capacità positiva. Di più, la palla ha la stessa capacità della sua frontiera (bidimensionale): cercando di allontanarsi quanto più possono le une dalle altre, le cariche nella palla trovano la configurazione d'equilibrio schiacciandosi sulla sua frontiera. (In \mathbb{R}^2 , l'esistenza di insiemi di grande capacità e piccola misura di Hausdorff è ben nota ai fachiri, che utilizzano la teoria del potenziale per fabbricare comodi letti di chiodi).

A causa della non additività, trovare stime della capacità che valgano per classi d'insiemi abbastanza generali non è facile. È noto da tempo che non si può decidere la positività

della capacità d'un insieme basandosi soltanto sulla dimensione di Hausdorff di quell'insieme (ci sono comunque risultati ottimali per il confronto tra capacità e dimensione di Hausdorff, che si trovano nei testi standard della teoria matematica del potenziale: [Ts], [AH], eccetera).

Esiste però un contesto dove le stime per la capacità sono notevolmente più semplici, ed è quello della teoria del potenziale sugli alberi. In questo caso, infatti, esiste un semplice algoritmo che permette di trovare la capacità di un insieme mediante il calcolo di una frazione continua (generalizzata).

In questo seminario, vedremo come sia possibile ridurre la stima della capacità d'insiemi in contesti piuttosto generali (*teoria del potenziale non lineare su spazi metrici Ahlfors regolari, con nuclei di tipo Riesz-Bessel*) alla stima della capacità d'insiemi sul bordo di un albero, con annesso algoritmo.

Alcuni risultati paiono essere nuovi anche nel caso della teoria classica del potenziale in \mathbb{R}^3 . Indicherò di volta in volta come passare dal caso generale di cui primariamente mi occupo nel seminario a dei casi particolari più noti e famigliari.

1. GLI SPAZI METRICI AHLFORS-REGOLARI; GRAFI ED ALBERI AD ESSI ASSOCIATI

Sia $X = (X, \rho, m)$ uno spazio metrico di misura: ρ è una metrica su X e m è una misura di Borel positiva su X . **In questo seminario considero X di diametro finito**, $\text{diam}(X) = 1$. La palla metrica è indicata con

$$B(x, r) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}.$$

Suppongo anche che (X, ρ) sia completo. Lo spazio (X, ρ, m) è Ahlfors regolare se esiste $Q > 0$ s.t.

$$(1) \quad m(B(x, r)) \approx r^Q.$$

Nel caso in cui $\text{diam}(X) < \infty$, la richiesta si fa solo per $0 < r < \text{diam}(X)$. L'esponente Q è detto *dimensione* di X . È noto che, se X è uno spazio Ahlfors regolare di dimensione Q , possiamo rimpiazzare la misura m con la misura di Hausdorff Q -dimensionale. (Vedi il magnifico [Fal] per un'introduzione in profondità alla dimensione di Hausdorff).

Il nucleo di Riesz pesato $K(x, y) = |x - y|^{-sn}$ in \mathbb{R}^n può essere scritto in termini sia della distanza, che della misura naturali di \mathbb{R}^n e si presta bene ad essere generalizzato al caso Ahlfors- Q -regolare. Fissiamo $s \in (0, 1)$ e definiamo il nucleo di Riesz $K = K_s$, $K : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$,

$$K(x, y) := [m(B(x, \rho(x, y))) + m(B(y, \rho(x, y)))]^{-s}.$$

Associata al nucleo vi sono nozioni di *potenziale* e *energia* per misure di Borel positive,

$$K\mu(x) = \int K(x, y)d\mu(y)$$

e

$$\mathcal{E}(\mu) = \int_X [K\mu(x)]^{p'} dm(x),$$

quindi una definizione di *capacità*. [Notare l'omogeneità: $\mathcal{E}(t\mu) = t^{p'}\mathcal{E}(\mu)$]. Let $E \subseteq X$ chiuso. Allora,

$$(2) \quad \text{Cap}(E) = \sup_{\text{supp}(\omega) \subseteq E} \left[\frac{\omega(K)^p}{\mathcal{E}(\omega)^{p-1}} \right].$$

Alcuni esempi di spazi Ahlfors-regolari completi.

- (1) \mathbb{R}^Q euclideo.
- (2) G , gruppo di Carnot con dimensione omogenea Q .
- (3) $(\mathbb{R}, |x - y|^{1/2})$ (e generalizzazioni): $Q = 2$.
- (4) "Fiocco di neve" di Koch in \mathbb{R}^2 , $Q = \frac{\log 4}{\log 3}$, m la sua misura di Hausdorff Q -dimensionale.
- (5) $C \subset \mathbb{R}$: insieme di Cantor "1/3" di dimensione $Q = \frac{\log 2}{\log 3}$, m la sua misura di Hausdorff Q -dimensionale.
- (6) Il bordo di un albero omogeneo (di fatto, un insieme di Cantor generalizzato) con la misura di Hausdorff (vedi [BePe] per una trattazione esaustiva, ma breve sul bordo degli alberi omogenei, e anche qualche informazione più avanti in questo seminario), con la sua dimensione naturale.
- (7) Eccetera...

1.1. Il teorema di M. Christ. In ipotesi più generali delle nostre (*spazi omogenei alla Coifman-Weiss*), Michael Christ ha dimostrato un teorema di discretizzazione per spazi metrici di misura. La *parte facile* del teorema è quella che ci serve.

Teorema A (M. Christ). *Esiste una collezione $\{Q_\alpha^k, \alpha \in I_k, k \in \mathbb{N}\}$ di sottoinsiemi aperti di X ed esistono $\delta > 0, a_0 > 0, c_4 > 0$ t.c.*

- (i) $m(X \setminus \cup_{\alpha \in I_k} Q_\alpha^k) = 0$ vale per ogni $k \geq 0$;
- (ii) se $l \geq k$, allora vale una delle seguenti: (ii-1) $Q_\beta^l \subseteq Q_\alpha^k$; oppure (ii-2) $Q_\beta^l \cap Q_\alpha^k = \emptyset$;
- (iii) per ogni (l, β) e $l < k$, esiste un unico α in I_k t.c. $Q_\beta^l \subseteq Q_\alpha^k$;
- (iv) $\text{diam}(Q_\alpha^k) \leq c_4 \delta^k$;
- (v) per ogni (k, α) , $B(z_\alpha^k, \delta^k) \subseteq Q_\alpha^k$, per una scelta di punti $z_\alpha^k \in Q_\alpha^k$.

Quando non ci interessa specificare il “livello” k di $\alpha \in I_k$, scriviamo $Q_\alpha^k = Q_\alpha$. Cambiando le costanti, possiamo supporre che I_0 contenga un unico elemento o e che $Q_o = X$ sia tutto lo spazio.

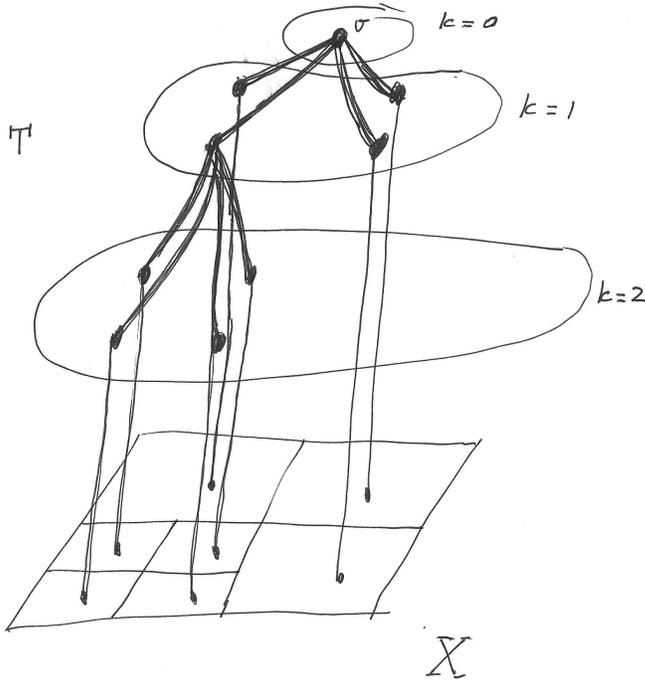
Consideriamo gli insiemi $\alpha \equiv (k, \alpha) \leftrightarrow Q_\alpha^k \equiv Q_\alpha$ come elementi di un nuovo spazio (numerabile) T . Per ogni $\alpha \in I_k$, indichiamo con $k = d(\alpha)$ il *livello* di α in T . L'insieme T ha una naturale *struttura ad albero*: i vertici α e β di T sono legati da un lato di T se $d(\beta) = d(\alpha) + 1$ e $Q_\beta \subseteq Q_\alpha$; ovvero se la stessa relazione avviene scambiando i ruoli di α e β . L'albero T ha una distanza naturale d : $d(\alpha, \beta)$ è il minimo numero di lati in un percorso su T che congiunge α e β . La distanza è realizzata da *geodetiche*: percorsi (univocamente determinati) tra α e β che realizzano il minimo in questione. Indichiamo con $[\alpha, \beta]$ la geodetica tra α e β . Introduciamo anche su T un ordine parziale (determinato dalla radice o): $\alpha \leq \beta$ se e solo se $\alpha \in [o, \beta]$.

La struttura dell'albero riproduce solo in parte topologia e geometria di X : le scatole Q_α e Q_β possono essere adiacenti in X (cioè, allo stesso livello, con punti appartenenti alle chiusure d'entrambe), pur essendo α e β assai distanti in T .

Per meglio codificare la geometria di X , introduciamo su T una *struttura di grafo*: due punti distinti α e β in T sono connessi da un lato del grafo G se e solo se (i) sono connessi da un lato di T , oppure (ii) sono allo stesso livello in T e esistono punti $x \in \alpha$ e $y \in \beta$ t.c. $\rho(x, y) \leq \delta^k$. Se (i) o (ii) accadono, scriviamo $\alpha \tilde{G} \beta$. La distanza conta-lati in G è

indicata con d_G . Anch'essa è realizzata da geodetiche che, contrariamente al caso dell'albero, possono non essere uniche. Identifichiamo $T = G$ come *insieme dei vertici*, ma usiamo i termini T e G , in linea di massima, quando ci riferiamo alle differenti strutture su di esso. (In teoria dei grafi, si dice che T è un *albero generatore*, o *spanning tree*, per G).

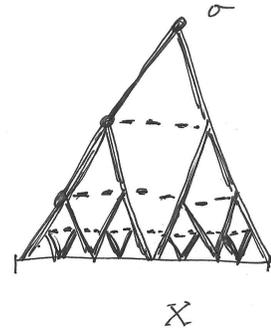
Fig. 1



L'albero T associato alla decomposizione di X .

Fig. 2

I lati dell'albero sono continui. Il grafo G ha dei lati aggiuntivi (in tratteggio) per regioni metricamente prossime allo stesso livello.



Dal momento che saremo interessati a misure potenzialmente singolari su X , dobbiamo rifinire in alcuni punti la costruzione di Christ.

Lemma 1.1. • Per ogni k , abbiamo $\cup_{\alpha \in I_k} \overline{Q_\alpha^k} = X$.

- Siano $F^k = \cup_{\alpha \in I_k} \partial Q_\alpha^k$ e $F = \cup_k F^k$. Allora, ogni F^k è chiuso, $F^k \subseteq F^{k+1}$ e $m(F) = 0$.
- Esiste c indipendente da $k \geq 0$ e da $x \in X$ t.c. $\#\{\alpha : x \in \overline{Q_\alpha^k}\} \leq c$.
- Esiste c indipendente da α in G t.c. $\#\{\beta \in G : \beta \sim \alpha\} \leq c_6$: il grafo G ha "geometria limitata".

1.2. Lo spazio X come bordo di G . Definiamo ora una nuova distanza $\bar{\rho}$ su $G \cup X$. Siano $\alpha \neq \beta$ punti di G tali che $d(\alpha) \leq d(\beta) \leq d(\alpha) + 1$ e $\alpha \sim_G \beta$. Al lato $[\alpha, \beta]$ di G associamo il peso $\ell_G([\alpha, \beta]) := \delta^{d(\alpha)}$. La lunghezza di un cammino $\Gamma = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ in G è definita sommando la lunghezza dei suoi lati. Quando necessario, poniamo $\ell_G((\alpha)) = 0$, dove (α) è il cammino banale da α a se stesso. La distanza $\bar{\rho}$ è definita, per punti $\alpha, \beta \in G$, come

$$(3) \quad \bar{\rho}(\alpha, \beta) = \inf\{\ell_G(\Gamma) : \Gamma \text{ un cammino di estremi } \alpha \text{ and } \beta\}.$$

Dalla disuguaglianza triangolare,

$$(4) \quad \rho(Q_\alpha, Q_\beta) \leq c\bar{\rho}(\alpha, \beta).$$

Sia $(\bar{G}, \bar{\rho})$ il completamento dello spazio metrico $(G, \bar{\rho})$. Ogni punto $\alpha \in G$ è isolato in \bar{G} . Sia ora $\partial G := \bar{G} \setminus G$. Esiste una biiezione \flat tra ∂G e X .

Lemma 1.2. *Sia $a = \{\alpha_n\}$ una successione di Cauchy in $(G, \bar{\rho})$, non definitivamente costante. Sia $[a]$ la classe d'equivalenza di a in ∂G e si definisca:*

$$\flat([a]) = x \in X$$

se e solo se $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x, Q_{\alpha_n}) = 0$.

Allora, \flat è una (ben definita) biiezione di ∂G su X .

La mappa \flat in Lemma 1.2 identifica lo spazio metrico di misura $X = (X, \rho, m)$ da cui siamo partiti con il bordo metrico di un grafo G . D'ora in poi identifichiamo $\partial G = X$. Il teorema più sotto ci dice che questa identificazione conserva gli elementi fondamentali della struttura di x .

Teorema 1.1. (i) *La metrica $\bar{\rho}$, ristretta a X , è bilipschitz-equivalente a ρ :*

$$c_1\rho(x, y) \leq \bar{\rho}(x, y) \leq c_2\rho(x, y).$$

(ii) *Sia $Z_k = \{z_\alpha^k : \alpha \in I_k\}$ l'insieme dei punti $z_\alpha^k \in Q_\alpha^k$ citati nel Teorema A e sia $G_k = \{\alpha \in G : d(\alpha) = k\}$. Allora, $\rho|_{Z_k}$ è bilipschitz-equivalente a $\bar{\rho}|_{G_k}$,*

$$c_1\rho(z_\alpha^k, z_\beta^k) \leq \bar{\rho}(\alpha, \beta) \leq c_2\rho(z_\alpha^k, z_\beta^k).$$

Ogni spazio Ahlfors-regolare (limitato e completo rispetto alla metrica, ma credo che queste ipotesi siano facilmente rimovibili) è dunque, a meno di un cambiamento bilipschitz della metrica, il bordo di un grafo abbastanza regolare e del tutto esplicito. Quindi, ogni spazio Ahlfors regolare X , identificato con ∂G , può essere esteso a uno spazio metrico più ampio (la chiusura $G \cup X$ del grafo G), in cui la distanza tra punti (può essere facilmente dimostrato) è realizzata da geodetiche (è la distanza associata a una nozione di lunghezza).

“Ingrossando” i lati del grafo, potremmo anche identificare $X = \partial M$, dove M è una varietà riemanniana che, rispetto alla distanza riemanniana, costituisce uno spazio Ahlfors regolare di dimensione $[Q] + 1$. Il messaggio è che, anche se lo spazio X non contiene un gran numero di curve rettificabili, possiamo recuperare tali curve in uno spazio più ampio. Ciò potrebbe fornire una via di passaggio tra la teoria del potenziale sugli spazi Ahlfors regolari in genere e quella su spazi regolari che soddisfano una disuguaglianza di Poincaré, sviluppata da Heinonen, Koskela e da un gran numero di ricercatori dopo di loro [HeK1] [He].

Nella dimostrazione del Teorema 1.1 si mostra che, dati $x, y \in X$, esiste una “quasi-geodetica” in \overline{G} per la distanza $\overline{\rho}(x, y)$, che passa attraverso un punto a livello k , con $\rho(x, y) \approx \delta^k$. Questo fatto estende a un caso metrico più generale la ben nota relazione tra geodetiche iperboliche e distanza euclidea nel semipiano superiore. Quando lo spazio (X, ρ) ha una metrica definita da una lunghezza, come negli spazi introdotti e studiati da Heinonen and Koskela in [HeK1], troviamo delle “quasi-geodetiche” congiungenti $x, y \in X$ a ogni livello n di \overline{G} tale che $\delta^n \leq \rho(x, y)$. Quando lo spazio è povero di curve rettificabili, come succede con le metriche “fiocco di neve”, una quasi geodetica che congiunge x and y non può essere completamente contenuta in una piccola striscia di \overline{G} : deve per forza raggiungere un livello n t.c. $\delta^n \gtrsim \rho(x, y)$.

1.3. L'albero T e il suo bordo come spazi metrici Ahlfors-regolari. Per l'albero T seguiamo il cammino inverso, determinando il bordo dall'interno. La costruzione è classica, ma la riassumiamo brevemente. Il *bordo* ∂T dell'albero T ha come elementi le geodetiche infinite aventi inizio nella radice o di T . Siano ζ, ξ due geodetiche (che penso, nel seguito, come insiemi di vertici, piuttosto che di lati) e sia $\zeta \wedge \xi$ in T il *confluente* di

ζ e ξ : l'unico elemento tale che $\zeta \cap \xi = [0, \zeta \wedge \xi]$ (ovvero, con riferimento alla relazione d'ordine parziale \leq introdotta sui vertici di T , $\zeta \wedge \xi = \max(\zeta \cap \xi)$). Sia $0 < \delta < 1$ (nel caso dell'albero proveniente dalla decomposizione diadica di uno spazio Ahlfors-regolare, δ è il numero la cui esistenza c'è assicurata dal teorema di Christ). Definiamo una distanza "euclidea" ρ_T su ∂T ponendo

$$\rho_T(\zeta, \xi) = 2^{-d(\zeta \wedge \xi)}.$$

Esercizio: verificare che si tratta di una distanza. (**SUggerimento:** a meno di una costante moltiplicativa, ρ_T è la restrizione a ∂T della distanza che si ottiene attribuendo a ogni lato $[x, y]$ di T il peso $\delta^{\max\{d(x), d(y)\}}$; e usando questo peso per definire la lunghezza dei cammini in T).

La distanza ρ_T ha delle curiose proprietà. Sia x un elemento di T , che quindi parametrizza una scatola diadica Q_x di Christ in X . Definiamo $Q'_x = \{\zeta \in \partial T : x \in \zeta\}$, l'insieme degli elementi di ∂T che, pensati come geodetiche di T , passano per x . Si verifica facilmente che (i) ogni Q'_x è una palla metrica in ∂T ; (ii) come in un'immagine del Paradiso dantesco, ogni punto di Q'_x può essere preso come centro metrico di Q'_x . (Viceversa, ogni palla metrica in ∂T ha la forma Q'_x per qualche x in T).

Proposizione 1.1. *Sia (X, ρ) uno spazio metrico completo, limitato e Ahlfors-regolare di dimensione $Q > 0$ (rispetto alla misura di Hausdorff Q -dimensionale in (X, ρ)) e sia T l'albero associato a (X, ρ) dal teorema di Christ. Allora, lo spazio metrico $(\partial T, \rho_T)$ è, a sua volta, uno spazio metrico completo, limitato e Ahlfors-regolare della stessa dimensione Q (rispetto alla misura di Hausdorff Q -dimensionale in $(\partial T, \rho_T)$).*

La dimostrazione è poco più che un assemblaggio di definizioni.

Se m è la misura rispetto a cui (X, ρ, m) è Ahlfors Q -regolare, possiamo utilizzare in ∂T l'unica misura m' di Borel che coincide con m sulle regioni diadiche: $m'(Q'_x) := m(Q_x)$.

Possiamo ora definire (stessi Q, s e p) una capacità per sottoinsiemi di ∂T .

1.4. La mappa $\Lambda : \partial T \rightarrow X$ e il Teorema di Discretizzazione per le Capacità. Sia $P_T(\xi) = (\xi_n)$ la geodetica dell'albero che inizia alla radice o e finisce nel $\xi \in \partial T$ del bordo (pansata come successione di elementi di T , dove ciascun ξ_n è collegato con un lato di T

al successivo ξ_{n+1}). Ricordo che ogni $\xi_n \in T$ che appare in $P_T(\xi)$ può essere identificata con una scatola diadica $Q(\xi_n)$ in I_n . Definiamo $\Lambda : \partial T \rightarrow X$,

$$\Lambda : \xi \mapsto \Lambda(x) = \bigcap_{n \geq 0} \overline{Q(\xi_n)}.$$

Dalla discussione precedente segue che Λ è una contrazione,

$$\bar{\rho}(\Lambda(\zeta), \Lambda(\xi)) \leq \rho_T(\zeta, \xi).$$

Il teorema di discretizzazione. La mappa Λ porta insiemi compatti in insiemi compatti ed è facile vedere che, infatti, porta chiusi in chiusi. **Non porta, in generale, aperti in aperti.** Ovviamente, la controimmagine di un insieme chiuso mediante Λ è chiuso e si vede facilmente che la controimmagine di un compatto è un compatto.

Teorema 1.2. *Se E è compatto in X , allora*

$$(5) \quad \text{Cap}(E) \approx \text{Cap}_{\partial T}(\Lambda^{-1}(E)).$$

Qui, $\text{Cap}_{\partial T}$ è la capacità sul bordo ∂T dell'albero T , definita analogamente alla capacità definita su X , con gli stessi parametri: Q , la dimensione di Hausdorff; p , l'esponente di integrabilità; s , il parametro che misura "l'ordine di differenziazione". Se μ_T è la misura di Hausdorff Q -dimensionale su ∂T , allora il nucleo utilizzato per definire $\text{Cap}_{\partial T}$ è

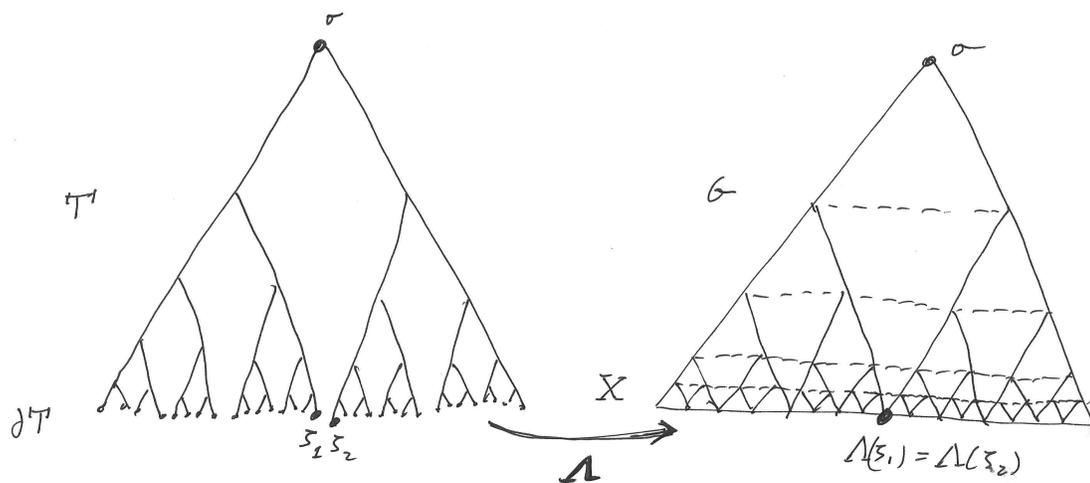
$$K(x, y) = [\mu_T(x, \rho(x, y)) + \mu_T(y, \rho(x, y))]^{-s}$$

Nell'altra direzione, abbiamo che, se F è compatto in ∂T , allora

$$(6) \quad \text{Cap}(\Lambda(F)) \approx \text{Cap}_{\partial T}(F).$$

Una delle difficoltà principali è qui è che la mappa Λ non è 1-1, quindi esistono insiemi aventi capacità positiva in X che hanno preimmagini multiple, talvolta assai distanti tra loro, in ∂T . Questa difficoltà non appare quando X è omeomorfo a un sottoinsieme della retta reale, dal momento che in questo caso l'insieme dei punti aventi più controimmagini è numerabile; pur rimanendo vero che porzioni di E che sono vicine in X possono risultare distanti in ∂T .

Fig 3.



La mappa $\Lambda: \partial T \rightarrow X$

Proprietà topologiche e misurabili di Λ . La mappa Λ non è aperta, né è iniettiva; tuttavia, ha alcune buone proprietà.

Lemma 1.3. • *Esiste una costante c indipendente da x t.c.*

$$\#\{\zeta \in \bar{T} : \Lambda(\zeta) = x\} \leq c.$$

- Λ mappa ∂T suriettivamente su X .
- Ogni insieme di Borel A in ∂T può essere decomposto ($A = \coprod_i A_i$) come unione disgiunta numerabile d'insiemi di Borel A_i t.c. la restrizione $\Lambda|_{A_i}$ di Λ a ciascun A_i sia 1-1.

Inoltre, se A è un insieme di Borel in ∂T , allora $\Lambda(A)$ è un insieme di Borel in X .

La dimostrazione del terzo punto nel lemma precedente richiede un certo sforzo (stiamo muovendo la misurabilità nella “direzione sbagliata”, dobbiamo quindi utilizzare le proprietà particolari di Λ), ma è necessaria per poter muovere delle misure singolari da X a ∂T (muoverle, cioè, a loro volta nella direzione sbagliata).

Essendo continua, la mappa Λ spinge misure di Borel da ∂T a X . Se ν è una misura su ∂T , sia

$$\Lambda_*\nu(E) := \nu(\Lambda^{-1}(E)),$$

ogniqualevolta E sia Borel misurabile in X . Vogliamo “tirare” misure nell’altro verso. Sia ω una misura non negativa di Borel su X e -per ogni sottinsieme di Borel A di ∂T , poniamo

$$N(x) = \#\{\zeta \in \partial T : \Lambda(\zeta) = x\}, \quad N_A(x) = \#\{\zeta \in A : \Lambda(\zeta) = x\},$$

e definiamo

$$(7) \quad \Lambda^*\omega(A) := \int_X \frac{N_A(x)}{N(x)} d\omega(x).$$

Si noti che, al contrario dell’operatore “pushforward” Λ_* , l’operatore Λ^* non è canonicamente associato a Λ (ogni distribuzione di probabilità su $\Lambda^{-1}(x)$ che sia misurabile rispetto a x svolgerebbe lo stesso ruolo qui svolto da $N_A(x)/N(x)$). L’integrale (7) è ben definito perché $x \mapsto N_A(x)$ è Borel misurabile, un fatto che segue dall’affermazione nel Lemma 1.3.

Per ogni x in X , sia $\nu_x(A) = \frac{\#\{(\Lambda^{-1}(x) \cap A)\}}{\#\{\Lambda^{-1}(x)\}}$ la misura del conteggio normalizzata su $\Lambda^{-1}(x)$. Allora,

$$\int_{\partial T} \varphi(\zeta) d\Lambda^*\omega(\zeta) = \int_X \left\{ \int_{\Lambda^{-1}(x)} \varphi(\zeta) d\nu_x(\zeta) \right\} d\omega(x)$$

ogniqualevolta ω è una misura di Borel su X e φ è Borel misurabile.

Ecco una breve lista delle utili proprietà di Λ^* .

Proposizione 1.2. *La misura $\Lambda^*(\omega)$ è una misura di Borel su ∂T . Inoltre, valgono le seguenti.*

$$(i) \quad \Lambda_*(\Lambda^*(\omega)) = \omega.$$

(ii) Sia $N = \max\{N(x) : x \in X\}$. Allora, per ogni insieme Borel misurabile A in ∂T ,

$$\frac{\omega(\Lambda(A))}{N} \leq \Lambda^*(\omega)(A) \leq \omega(\Lambda(A)).$$

Riguardo alle relazioni tra i supporti di tutte queste misure, abbiamo che

(iii) $\text{supp}(\Lambda^*\omega) \subseteq \Lambda^{-1}(\text{supp}(\omega))$;

(iv) $\text{supp}(\Lambda_*\nu) = \Lambda(\text{supp}(\nu))$.

(v) $\text{supp}(\omega) \subseteq \Lambda(\text{supp}(\Lambda^*\omega))$.

Come conseguenza di (v) abbiamo $\Lambda^{-1}(\text{supp}(\omega)) \subseteq \Lambda^{-1}(\Lambda(\text{supp}(\Lambda^*\omega)))$. Crediamo che una proprietà più forte valga: $\Lambda^{-1}(\text{supp}(\omega)) \subseteq \text{supp}(\Lambda^*\omega)$ (quindi, per (iii), $\Lambda^{-1}(\text{supp}(\omega)) = \text{supp}(\Lambda^*\omega)$), ma non abbiamo una dimostrazione.

Osservazione 1.1. *Quanto alla misura m su X da cui eravamo partiti, sappiamo che $N_A(x)/N(x) = 1$, m -q.o. Potremmo identificare quindi, e in effetti identificheremo, m , la misura su X , e $\Lambda^*m = \tilde{m}$, la misura su ∂T (che è poi ciò che si fa abitualmente in analisi armonica).*

Avremo anche bisogno di una versione “localizzata” di Λ^* . Sia F un sottoinsieme chiuso fissato ∂T e sia ω una misura di Borel su X . Then,

$$\Lambda_F^*(A) := \Lambda^*(F \cap A),$$

è la restrizione di Λ^* a F . Proposizione 1.2 si localizza anch’essa:

Corollario 1.1. *Sia ω una misura di Borel positiva su X e sia F un sottoinsieme chiuso di ∂T . Allora,*

(i) $\text{supp}(\Lambda_F^*\omega) \subseteq \Lambda^{-1}(\text{supp}(\omega)) \cap F$.

(ii) $\Lambda_F^*\omega(A) \approx \omega(\Lambda(F \cap A))$, quando $A \subseteq \partial T$ è misurabile.

(iii) $\Lambda_*(\Lambda_F^*\omega)(E) \approx \omega(E \cap \Lambda(F))$, quando $E \subseteq X$ è misurabile.

2. LA DISUGUAGLIANZA DI MUCKENHOUPT-WHEEDEN E DI WOLFF SUI GRAFI

Siano $0 < s < 1$ e $q \geq 1$.

Per ogni x in X , sia $P_G(x) = \{\alpha \in G : d_G(\alpha, \Lambda^{-1}(x)) \leq 1\}$; cioè, l'insieme di quegli α in G aventi distanza al più uno (nella metrica discreta d_G) da una geodetica dell'albero avente inizio in o e fine in x . Data una misura di Borel ω su X , si definiscano

$$\mathcal{I}_G\omega(x) = \sum_{\alpha \in P_G(x)} \frac{\omega(\alpha)}{m(\alpha)^s},$$

e

$$\mathcal{S}_G\omega(x) = \sup_{\alpha \in P_G(x)} \frac{\omega(\alpha)}{m(\alpha)^s}.$$

Qui, $\omega(\alpha) := \omega(\overline{Q_\alpha^k})$ e $m(\alpha) := m(\overline{Q_\alpha^k}) = m(Q_\alpha^k)$ sono le misure dei corrispondenti sottoinsiemi di X . Chiaramente, $\mathcal{S}_G\omega \leq \mathcal{I}_G\omega$ punto a punto: si tratta dell'inclusione $\ell^1 \subseteq \ell^\infty$. Il seguente, sorprendente teorema di Muckenhoupt e Wheeden mostra che, in media, anche la disuguaglianza opposta vale.

Teorema B (Muckenhoupt e Wheeden, e T. Wolff). *Se $q \geq 1$, esiste una costante $c > 0$ t.c.*

$$(8) \quad \int_X \mathcal{I}_G\omega(x)^q dm(x) \leq c \int_X \mathcal{S}_G\omega(x)^q dm(x).$$

La disuguaglianza fu mostrata in [MW] per potenziali di Riesz. In [HW], T. Wolff ritrovò indipendentemente, con una dimostrazione assai diversa, la “metà” della disuguaglianza che qui c'interessa. Nel nostro contesto, la disuguaglianza di Wolff recita:

$$\int_X \mathcal{I}_G\omega(x)^q dm(x) = \int_X \left(\sum_{\alpha \in P_G(x)} \frac{\omega(\alpha)}{m(\alpha)^s} \right)^q dm(x) \leq C \int_X \sum_{\alpha \in P_G(x)} \frac{\omega(\alpha)^q}{m(\alpha)^{sq}} dm(x).$$

Il membro a sinistra è legato alla classica capacità su X . Il membro di destra è invece associato a una diversa capacità sull'albero, come vedremo più avanti. L'equivalenza di queste due capacità permise a Hedberg e Wolff di estendere al caso nonlineare importanti risultati della teoria del potenziale lineare classica [HW]. L'altra metà di (8),

$$(9) \quad \int_X \sum_{\alpha \in P_G(x)} \frac{\omega(\alpha)^q}{m(\alpha)^{sq}} dm(x) \leq C \int_X \mathcal{S}_G\omega(x)^q dm(x),$$

fu a sua volta riscoperta in [AR], con una dimostrazione completamente diversa. Gli autori erano motivati dal fatto che, nel caso lineare $q = 2$, l'equivalenza delle due quantità in (9)

segue a priori dal fatto che entrambe le condizioni sono necessarie e sufficienti affinché la misura ω soddisfi certe disuguaglianze di traccia olomorfe [KS][ARS1].

3. EQUIVALENZA DELLE CAPACITÀ D'INSIEME SU X , ∂G E ∂T

Il ruolo della disuguaglianza di Muckenhoupt-Wheeden-Wolff diviene più chiaro alla luce del seguente lemma.

Lemma 3.1. *Esistono costanti positive indipendenti dalla misura di Borel ω e dal punto $x \in X$ t.c.*

$$c_1 \sum_{\alpha \in P_G(x), y \in \alpha} m(\alpha)^{-s} \leq K(x, y) \leq c_2 \sum_{\alpha \in P_G(x), y \in \alpha} m(\alpha)^{-s}$$

e

$$c_1 \mathcal{I}_G \omega(x) \leq K\omega(x) \leq c_2 \mathcal{I}_G \omega(x)$$

Al nucleo K su X associamo un nuovo nucleo $K_{\partial T}$ su ∂T , con la stessa misura m e con ρ_T al posto di $\rho \approx \bar{\rho}$.

Teorema 3.1. *Data la misura ω in X , sia $\Lambda^*(\omega)$ la misura su ∂T definita da (7), e sia $\mathcal{E}_{\partial T}$ l'energia $K_{\partial T}$. Allora,*

$$(10) \quad \mathcal{E}_X(\omega) \approx \mathcal{E}_{\partial T}(\Lambda^*\omega).$$

D'altra parte, se ν è una misura su ∂T , allora

$$(11) \quad \mathcal{E}_{\partial T}(\nu) \approx \mathcal{E}_X(\Lambda_*\nu).$$

Dim.

Iniziamo a mostrare (10)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_X(\omega) &:= \int_X K\omega^{p'} dm \\ &\approx \int_X [\mathcal{I}_G \omega]^{p'} dm \text{ per Lemma 3.1} \\ &\approx \int_X \sum_{\alpha \in P_G(x)} \left(\frac{\omega(\alpha)}{m(\alpha)^s} \right)^{p'} dm(x) \\ &\text{per il Theorem B} \\ &= \sum_{\alpha \in T} \frac{\omega(\alpha)^{p'}}{m(\alpha)^{sp'}} \int_X \chi(x \in G : \alpha \in P_G(x)) dm(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\approx \sum_{\alpha \in T} \frac{\omega(\alpha)^{p'}}{m(\alpha)^{sp'-1}} \\
&\approx \sum_{\alpha \in T} \frac{\Lambda^*(\omega)(\alpha)^{p'}}{m(\alpha)^{sp'-1}},
\end{aligned}$$

per la Proposizione 1.2. L'ultima espressione nella catena di equivalenze non dipende dalla struttura di grafo, ma solo dalla struttura dell'albero T . Deve quindi essere equivalente a $\mathcal{E}_{\partial T}(\Lambda^*(\omega))$.

Consideriamo ora (11). Richiamo l'identificazione $\alpha \equiv \overline{Q_\alpha}$ tra punti di G e chiusure di insiemi diadici in X . Nell'albero T , α è identificato con una sottoregione diadica alla stessa maniera, $[\alpha] \subseteq \partial T$, e $[\alpha] \subset \Lambda^{-1}(\alpha)$. L'inclusione è in genere propria a causa dell'«effetto bordo»: elementi sulla frontiera $\overline{Q_\alpha}$ hanno controimmagini in sottoinsiemi diadici ∂T allo stesso livello di $[\alpha]$, ma diversi da $[\alpha]$. Comunque, è ancora vero che $\Lambda^{-1}(\alpha) \subset \cup_{\beta \sim_G \alpha} [\beta]$, e questo, assieme all'Ahlfors-regolarità e al limite uniforme sul numero di tali β , è sufficiente a dimostrare che (usando l'identificazione della misura m su X con la misura Λ^*m su ∂T):

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\partial T}(\nu) &\approx \sum_{\alpha} \frac{\nu([\alpha])^{p'}}{m(\alpha)^{sp'-1}} \\
&\approx \sum_{\beta} \frac{\Lambda_*\nu(\beta)^{p'}}{m(\beta)^{sp'-1}} \\
&\approx \mathcal{E}_X(\Lambda_*\nu).
\end{aligned}$$

■

Avendo ottenuto l'equivalenza delle energie per misure trasformate l'una nell'altra attraverso Λ_* o Λ^* , la dimostrazione del Teorema di Discretizzazione diviene un semplice esercizio, per cui rimando ad [ARSW].

Sui parametri Q, s, p . Si verifica facilmente che la teoria del potenziale si banalizza radicalmente, a meno che non si abbia $sp' \leq 1$. Nel caso $sp' > 1$, infatti, i singoli punti di X hanno capacità positiva.

4. ALCUNE APPLICAZIONI

Se la discretizzazione delle capacità non rendesse la vita più facile, sarebbe una pura curiosità. Vorremmo qui cercare di convincere il lettore che, a volte, lavorare con capacità

d'insiemi su alberi è più semplice che lavorare con corrispondenti nozioni nel continuo o, i che lo stesso, su grafi più generali. Mi restringo qui, per semplicità, al caso $s = 1/2$, $p = 2$, $Q = 1$ (si tratta del caso della capacità di Bessel “(2, 1/2)”, che è equivalente alla restrizione alla retta della capacità logaritmica nel piano; a sua volta importante in quanto dotata di proprietà d'invarianza conforme).

4.1. Una capacità logaritmica su $T \cup \partial T$. Innanzitutto, la capacità $\text{Cap}_{\partial T}$ a cui ci si riferiva nel Teorema di Discretizzazione è equivalente a una diversa definizione di capacità *sulla chiusura dell'albero*, quando ristretta a insiemi su ∂T . Chiamiamo Kap questa nuova capacità.

Definiamo un *operatore di Hardy* su T come segue. Se $\varphi : T \rightarrow \mathbb{R}$,

$$I\varphi : T \cup \partial T \rightarrow \mathbb{R}, \quad I\varphi(\alpha) = \sum_{\beta \in P(\alpha)} \varphi(\beta).$$

Ricordo che $P(\alpha) \subset T$ è la geodetica (finita o infinita a seconda dei casi) avente inizio in o e che arriva sino ad α .

Se $E \subseteq T \cup \partial T$ è chiuso,

$$Kap(E) := \inf\{\|\varphi\|_{\ell^2(T)}^2 : I\varphi(\alpha) = 1 \forall \alpha \in E\}.$$

Teorema 4.1.

$$E \subseteq \partial T \implies Kap(E) \approx \text{Cap}_{\partial T}(E).$$

Questo teorema estende al caso metrico la ben nota equivalenza della capacità logaritmica di sottoinsiemi della retta reale del piano con la capacità di Bessel $B_{1/2}^2(\mathbb{R})$ degli stessi insiemi. (Questo fatto classico si può anche esprimere in termini di “perdita di mezza derivata” per le restrizioni alla retta reale di certe funzioni Sobolev definite sul piano: anche nel contesto metrico valgono simili considerazioni, su cui non mi soffermo).

Che la capacità Kap si possa pensare come una capacità logaritmica generalizzata, lo si vede anche da alcune sue altre proprietà.

Teorema 4.2. *Sia E chiuso in ∂T (ma potremmo anche considerare $E \subseteq T \cup \partial T$). Allora esiste una funzione estrema φ_E tale che:*

- $\|\varphi_E\|_{\ell^2(T)}^2 = Kap(E)$;

- $\varphi_E \leq 1$ su ∂T ;
- $\varphi_E = 1$ su E , fatta eccezione per un suo sottoinsieme di capacità nulla;
- esiste una misura di Borel μ_E a supporto in E tale che $\varphi_E(\alpha) = \mu_E(\mathcal{S}(\alpha))$ per ogni $\alpha \in T$;
- $Kap(E) = \mu_E(E) = \varphi_E(o)$.

[Quest'ultimo fatto si può esprimere dicendo che la **capacità di E** è la “derivata a infinito” della **funzione di Green dell'insieme $(T \cup \partial T) \setminus E$** ; un fatto ben noto nella teoria del potenziale classica.]

Inoltre, la funzione $I\varphi_E$ è “armonica” in $(T \cup \partial T) \setminus E$, nel senso che la sua “derivata” φ_E soddisfa, per ogni $x \in T$, l'equazione

$$\varphi_E(x) = \sum_{y \in C(x)} \varphi_E(y).$$

Nell'ultimo punto, $C(x)$ è l'insieme dei figli di x : $y \in C(x) \iff y > x$ e $d_T(x, y) = 1$.

Da queste proprietà segue quasi immediatamente che la capacità soddisfa una relazione ricorsiva che estende quella che definisce le frazioni continue. Per ogni $x \in T$, l'insieme $T_x = \{z \in T : z \geq x\}$ può essere considerato a sua volta un albero avente radice x . Possiamo quindi parlare di capacità Kap_x per sottoinsiemi di $\partial T_x = \mathcal{S}(x)$.

Teorema 4.3. *Sia $E \subseteq \partial T$ chiuso. Allora, per ogni $x \in T$,*

$$Kap_x(E \cap \partial T_x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{\sum_{y \in C(x)} Kap_y(E \cap \partial T_y)}}.$$

La proprietà suenunciata può essere utilizzata per calcolare *con precisione assoluta* stime *approssimate da sopra e sotto* della capacità d'insiemi in uno spazio metrico X . (Cioè, si utilizza la procedura ricorsiva sull'albero quante volte si voglia; mentre l'approssimazione viene fatta una sola volta) Questo fatto pare non essere stato notato in precedenza neanche nel caso più semplice, $X = \mathbb{R}$ (euclideo), $s = 1/2$ e $p = 2$.

4.2. Un'applicazione alla capacità dei condensatori in \mathbb{R}^2 . Sia $E \subset \partial \mathbb{D}$ un sottoinsieme del cerchio unitario in \mathbb{R}^2 e sia $D(r) = \{z \in \mathbb{R}^2 : |z| \leq r\}$, $0 < r < 1$. La capacità del condensatore $(E, D(r))$ è

$$\text{Cap}(E, D(r)) = \inf\{\|\nabla h\|_{L^2(\mathbb{D})}^2 : h|_{D(r)} = 0, h|_E = 1, h \in C^1(\mathbb{D}) \cap C(\mathbb{D} \cup E)\}.$$

È d'interesse, per esempio in analisi complessa, avere informazioni sul comportamento di $\text{Cap}(E, D(r))$, al variare di r . Considerando $\text{Cap}(E)$ definita come in precedenza, con $X = \partial\mathbb{D}$, $p = 2$ e $s = 1/2$ (la capacità logaritmica nel piano, approssimativamente), abbiamo i seguenti risultati [Ar], che danno risposta a una domanda che Carl Sundberg mi pose nel marzo 2010.

Teorema 4.4. *Se $\text{Cap}(E) > 0$, allora*

$$\lim_{r \rightarrow 1} \text{Cap}(E, D(r)) = +\infty.$$

Purtroppo, non c'è modo di rendere quantitativo il modo in cui si arriva al limite infinito (la risposta è negativa).

Teorema 4.5. *Per ogni $\epsilon \in (0, \text{Cap}(\partial\mathbb{D}))$ esiste $R(\epsilon) > 0$ tale che, comunque si scelga $r \in (0, 1)$ ci sono insiemi E in $\partial\mathbb{D}$ con $\text{Cap}(E) \geq \epsilon$, ma $\text{Cap}(E, D(r)) < R(\epsilon)$. Si può scegliere $R(\epsilon)$ come funzione crescente di ϵ .*

La dimostrazione di entrambi i teoremi, e di risultati ad essi collegati, è stata ottenuta trasferendo il problema su di un albero e indagando semplici sviluppi in frazioni continue.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [AH] Adams, David R.; Hedberg, Lars Inge Function spaces and potential theory. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 314. Springer-Verlag, Berlin, 1996. xii+366 pp.
- [Ar] Arcozzi, Nicola The capacity of shrinking condensers, in preparazione (preprint provvisorio disponibile).
- [AR] Arcozzi, Nicola(I-BOLO); Rochberg, Richard(1-WASN) Topics in dyadic Dirichlet spaces. (English summary) New York J. Math. 10 (2004), 45–67 (electronic).
- [ARS1] Arcozzi, Nicola; Rochberg, Richard; Sawyer, Eric Carleson measures for analytic Besov spaces. Rev. Mat. Iberoamericana 18 (2002), no. 2, 443–510.
- [ARS2] Arcozzi, N.; Rochberg, R.; Sawyer, E. Capacity, Carleson measures, boundary convergence, and exceptional sets. Perspectives in partial differential equations, harmonic analysis and applications, 1–20, Proc. Sympos. Pure Math., 79, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
- [ARSW] Arcozzi, Nicola; Rochberg, Richard; Sawyer, Eric; Wick, Brett Nonlinear potential theory on trees, graphs and Ahlfors regular metric spaces, in preparazione (preprint provvisorio disponibile).

- [BePe] Benjamini, Itai; Peres, Yuval Random walks on a tree and capacity in the interval. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* 28 (1992), no. 4, 557–592.
- [Christ] Christ, Michael A $T(b)$ theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy integral. *Colloq. Math.* 60/61 (1990), no. 2, 601–628.
- [dB] Di Biase, Fausto Fatou type theorems. Maximal functions and approach regions. *Progress in Mathematics*, 147. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1998. xii+152 pp.
- [Fal] Falconer, K. J.(4-BRST) The geometry of fractal sets. *Cambridge Tracts in Mathematics*, 85. Cambridge University Press, Cambridge, 1986. xiv+162 pp.
- [HW] Hedberg, L. I.(1-CAIT); Wolff, Th. H.(S-STOC) Thin sets in nonlinear potential theory. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 33 (1983), no. 4, 161–187.
- [He] Heinonen, Juha Lectures on analysis on metric spaces. *Universitext*. Springer-Verlag, New York, 2001. x+140 pp.
- [HeK1] Heinonen, Juha; Koskela, Pekka Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry. *Acta Math.* 181 (1998), no. 1, 1–61.
- [KS] Kerman, R.; Sawyer, E. The trace inequality and eigenvalue estimates for Schrödinger operators. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 36 (1986), no. 4, 207228.
- [MW] Muckenhoupt, Benjamin; Wheeden, Richard Weighted norm inequalities for fractional integrals. *Trans. Amer. Math. Soc.* 192 (1974), 261–274.
- [Ts] Tsuji, M. Potential theory in modern function theory. Reprinting of the 1959 original. Chelsea Publishing Co., New York, 1975. x+590 pp.