① Risolvere

$$\begin{cases} (E) & v_{xx} + 2\cdot v_x - v_{tt} = 0 \quad \text{per} \quad 0 \le x \le 1;\ t \ge 0 \\ (CB) & v(0,t) = v(1,t) = 0 \quad \text{per} \quad t \ge 0 \\ (CI)\ (a) & v(x,0) = f(x) = [2\cdot \sin(3\pi x) - \sin(5\pi x)]\cdot e^{-x} \\ \quad\ \ (b) & v_t(x,0) = g(x) = \sin(4\pi x)\cdot e^{-x} \end{cases}$$

Soluzione per esteso.

Sia l'equazione (E) che le condizioni (CB) sono omogenee: se $v = v_1$ e $v = v_2$ soddisfano (E) e (CB), allora $v = c_1 v_1 + c_2 v_2$ soddisfa (E) e (CB), comunque siano $c_1$ e $c_2$.

Il dominio è $(x,t) \in [0,1]\times[0,+\infty)$, è quindi naturale provare a risolvere (E)+(CB) per separazione di variabili.

Sia $v(x,t) = \varphi(x)\cdot\psi(t)$; $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$; $\psi : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$.

Allora,

$$\partial_{xx} v(x,t) = \varphi''(x)\cdot\psi(t)$$

$$\partial_x v(x,t) = \varphi'(x)\cdot\psi(t)$$

$$\partial_{tt} v(x,t) = \psi''(t)$$

Cerco soluzioni $v(x,t) \not\equiv 0$.

$$(E) \Leftrightarrow \varphi''(x)\cdot\psi(t) + 2\varphi'(x)\cdot\psi(t) - \varphi(x)\cdot\psi''(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\varphi''(x) + 2\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{\psi''(t)}{\psi(t)} \quad \forall x \in [0,1],\ t \ge 0.$$

Ciò è possibile solo se $\exists K \in \mathbb{R}$:

$$\underset{(E\varphi)}{\frac{\varphi''(x) + 2\cdot\varphi'(x)}{\varphi(x)} = K \quad \forall x \in [0,1]} \quad e \quad \underset{(E\psi)}{\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = K \quad \forall t \ge 0}$$

$(CB) \iff 0 = v(0,t) = \varphi(0) \cdot \psi(t) \quad \forall t \geq 0$

e $0 = v(1,t) = \varphi(1) \cdot \psi(t) \quad \forall t \geq 0$

Poiché $\psi \not\equiv 0$ (altrimenti avrei $v \equiv 0$), abbiamo

$(CB\varphi) \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0$

Risolviamo il problema agli autovalori per $\varphi$:

$$\begin{cases} (E\varphi) & \varphi''(x) + 2 \cdot \varphi'(x) - K\varphi = 0 \\ (CB\varphi) & \varphi(0) = \varphi(1) = 0. \end{cases}$$

con $\varphi \not\equiv 0$, se no $v \equiv 0$

$(E\varphi)$ è un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, lineare, omogenea e a coefficienti costanti per $\varphi$ (dipendente dal parametro $K \in \mathbb{R}$). Per risolverla, ne scrivo l'equazione caratteristica:

$$\lambda^2 + 2 \cdot \lambda - k = 0$$

aventi soluzioni $\lambda_1, \lambda_2 = -1 \pm \sqrt{1+k}$.

Devo considerare diversi casi: $1+K \lesseqgtr 0$.

(i) $1+K = -h^2 < 0 \quad (h > 0)$.

Allora, $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{-h^2} = -1 \pm ih$

e le soluzioni di $(E\varphi)$ diventano:

$$\varphi(x) = A \cdot e^{-x} \cdot \cos(hx) + B \cdot e^{-x} \cdot \sin(hx).$$

Uso le $(CB\varphi)$:

$$\begin{cases} 0 = \varphi(0) = A \\ 0 = \varphi(1) = e^{-1} \cdot [A \cdot \cos(h) + B \cdot \sin(h)] = e^{-1} \cdot B \cdot \sin(h). \end{cases}$$

Dev'essere $\sin(h)=0$, cioè $h = n\cdot\pi$ $(\exists n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$.

Quindi, $K = -1-n^2$ e le soluzioni di $(E\varphi)+(CB\varphi)$ sono, per tale valore di $k$, multipli costanti di:

$$\varphi_n(x) = \sin(n\pi x)\cdot e^{-x}$$

(ii) $1+K=0$. Allora, $h_1 = h_2 = -1$ e

$$\varphi(x) = A\,e^{-x} + Bx\cdot e^{-x}$$

Per $(CB\varphi)$:

$$\begin{cases} 0 = \varphi(0) = A \\ 0 = \varphi(1) = B\cdot e^{-1} \end{cases}$$

da cui $A=B=0$, quindi $\varphi\equiv 0$, che non ci dà nuove soluzioni.

(iii) $1+K = h^2 > 0$ $(h>0)$. Allora, $h_{1,2} = -1\pm h$ e

$$\varphi(x) = A\cdot e^{(-1+h)x} + B\cdot e^{(-1-h)x}.$$

Per $(CB\varphi)$:

$$\begin{cases} 0 = \varphi(0) = A+B \implies B = -A \\ 0 = \varphi(1) = A\cdot e^{-1+h} + B\cdot e^{-1-h} \end{cases}$$

Quindi, $0 = A\left(e^{-1+h} - e^{-1-h}\right) = A\cdot e^{-1}\left(e^{h}-e^{-h}\right)$,

che implica ($h\neq 0$!) $A=0$, dunque $B=0$ e $\varphi\equiv 0$, che non c'interessa.

---

$(E\varphi)+(CB\varphi)$ ha soluzioni $\varphi\not\equiv 0 \iff K=-1-n^2$ $(n\in\mathbb{N}, n\geq 1)$; che sono multipli di $\varphi_n(x) = e^{-x}\cdot\sin(n\pi x)$

Torno a $(E\Psi)$ con $k = -1-n^2$: 

$(E\Psi)$ $\Psi''(t) + (n^2+1)\Psi(t) = 0$

$$\lambda^2 + (n^2+1) = 0 \qquad \lambda = \pm i\sqrt{n^2+1}$$

Quindi

$$\Psi_n(t) = A_n \cdot \cos(\sqrt{n^2+1}\cdot t) + B_n \cdot \sin(\sqrt{n^2+1}\cdot t)$$

Le soluzioni trovate sono quindi:

$$v_n(x,t) = \varphi_n(x)\cdot \Psi_n(t) = e^{-x}\cdot \sin(\pi n x)\cdot\left[A_n \cos(\sqrt{n^2+1}\cdot t) + B_n \sin(\sqrt{n^2+1}\cdot t)\right]$$

Essendo, come già detto, $(E)+(CB)$ un problema omogeneo, le sue soluzioni (formalmente, almeno) hanno la forma:

$$(*)\ v(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x}\cdot \sin(\pi n x)\cdot\left[A_n\cdot \cos(\sqrt{n^2+1}\cdot t) + B_n \sin(\sqrt{n^2+1}\cdot t)\right]$$

[Notare che $e^{-x}$ può essere raccolto fuori dalla sommatoria].

Impongo ora le condizioni (CI).

Prima calcolo:

$$\partial_t v(x,t) = e^{-x}\cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\pi n x)\cdot\left[-A_n\cdot\sqrt{n^2+1}\cdot \sin(\sqrt{n^2+1}\cdot t) + B_n\cdot\sqrt{n^2+1}\cdot \cos(\sqrt{n^2+1}\cdot t)\right].$$

Quindi:

$$\circ\ e^{-x}\cdot[2\cdot \sin(3\pi x) - \sin(5\pi x)] = f(x) = v(x,0) = e^{-x}\cdot \sum_{n=1}^{+\infty} A_n\cdot \sin(\pi n x) \quad \text{e}$$

$$\circ\circ\ e^{-x}\cdot \sin(4\pi x) = g(x) = \partial_t v(x,0) = e^{-x}\cdot \sum_{n=1}^{+\infty} B_n\cdot\sqrt{n^2+1}\cdot \sin(\pi n x)$$

Semplificando, 

(o) $2\sin(3\pi x) - \sin(5\pi x) = e^x \cdot f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cdot \sin(\pi n x)$

(oo) $\sin(4\pi x) = e^x \cdot g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \cdot \sqrt{n^2+1} \cdot \sin(\pi n x)$

Cioè, dobbiamo espandere $e^x \cdot f(x)$ e $e^x \cdot g(x)$ in serie di seni. La formula generale ci dà:

$$A_n = 2 \cdot \int_0^1 e^x \cdot f(x) \cdot \sin(\pi n x)\, dx$$

$$B_n = \frac{2}{\sqrt{n^2+1}} \cdot \int_0^1 e^x \cdot g(x) \cdot \sin(\pi n x)\, dx$$

In questo caso, però, (o) e (oo) ci dicono direttamente quali siano i valori di $A_n$ e $B_n$:

$$A_3 = 2 \; ; \; A_5 = -1 \quad e \quad A_n = 0 \;\; \forall n \geq 1, \; n \neq 2, 5$$

$$B_4 = 1/\sqrt{17} \; ; \; B_n = 0 \quad \forall n \geq 1, \; n \neq 4.$$

La soluzione del problema iniziale è, allora,

$$u(x,t) = e^{-x}\Big\{ 2 \cdot \sin(3\pi x) \cdot \cos(\sqrt{10} \cdot t) + \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \sin(4\pi x) \cdot \sin(\sqrt{17}\, t)$$

$$- \sin(5\pi x) \cdot \cos(\sqrt{26} \cdot t) \Big\}$$

(2) Risolvere

$$\begin{cases} (E) \quad v_t = v_{xx} & \text{se} \quad 0 \le x \le \pi,\ t \ge 0 \\ (CB) \quad v_x(0,t) = v_x(\pi,t) = 0 & \text{se} \quad t \ge 0 \\ (CI) \quad v(x,0) = f(x) = \cos(7x) & \text{se} \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

Soluzione (solo i passaggi principali).

L'equazione (E) ha soluzioni $v(x,t) = \varphi(x) \cdot \psi(t)$ se valgono le equazioni:

$$(E\varphi) \quad \varphi''(x) - k \cdot \varphi(x) = 0$$

$$(E\psi) \quad \psi'(t) - k \cdot \psi(t) = 0$$

$\exists\, k \in \mathbb{R}$ fissato.

Le condizioni (CB) diventano

$$\varphi'(0) \cdot \psi(t) = 0 = \varphi'(\pi) \cdot \psi(t) \quad \forall t \ge 0,$$ quindi

$\varphi$ soddisfa il problema agli autovalori:

$$(A) \begin{cases} \varphi''(x) - k \cdot \varphi(x) = 0 \\ \varphi'(0) = 0 = \varphi'(\pi) \end{cases} \quad \text{con } \varphi \not\equiv 0$$

Analizzando i casi in cui $\lambda^2 - k = 0$ ha

(i) due soluzioni immaginarie ($k<0$);

(ii) due soluzioni coincidenti ($k=0$);

(iii) due soluzioni reali distinte ($k>0$);

Vediamo che (A) ha soluzioni $\varphi \not\equiv 0$ se e solo se $k = -n^2$ ($n \in \mathbb{N}$, anche $n=0$ è ammesso), nel qual caso:

$$\varphi_n(x) = \cos(nx) \qquad 0 \le x \le \pi; \quad n \in \mathbb{N}.$$

Inserisco $k = -n^2$ in $(E\Psi)$ e ottengo:

$$\Psi_n(t) = A_n \cdot e^{-n^2 t}$$

Quindi, la soluzione (formale) di $(E)+(CB)$ è

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \cdot e^{-n^2 t} \cdot \cos(nx).$$

Impongo ora $(CI)$:

$$-1+\cos(7x) = f(x) = v(x,0) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \cdot e^{-n^2 t} \cdot \cos(nx).$$

Chiaramente, $A_0 = -1$; $A_7 = 1$; $A_n = 0$ se $n \neq 0, 7$.

Quindi:

$$v(x,t) = -1 + e^{-49 \cdot t} \cdot \cos(7x)$$

è la soluzione di $(E)+(CB)+(CI)$.

<u>Nota</u>. In generale, per risolvere il problema di scrivere

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \cdot \cos(nx) \qquad 0 \le x \le \pi,$$

estendo $f$ a $f^{\#} : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, con $f^{\#}$ pari: $f^{\#}(-x) = f^{\#}(x) = f(x) \quad \forall x \in [0, \pi]$.

Essendo $f^{\#}$ pari;

$$f^{\#}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot \cos(nx) \qquad (-\pi \le x \le \pi)$$

con $A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\#}(x) \cdot \cancel{\cos(nx)}\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cancel{\cos(nx)}\, dx$

e $A_n \overset{n \ge 1}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\#}(x) \cdot \cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\, dx$

③ Risolvere

$$\begin{cases} (E) \quad v_{xx} = v_{tt} - 4v & 0 \le x \le \pi, \ t \ge 0 \\ (CB) \quad v(0,t) = v(\pi,t) = 0 & 0 \le x \le \pi \\ (CI) \quad v(x,0) = f(x) = \sin(x) + 2\cdot\sin(2x) + 3\cdot\sin(3x) \\ \qquad\quad v_t(x,0) = g(x) = 0 \end{cases}$$

Soluzione. Il metodo di separazione delle variabili ci porta a considerare:

$$v(x,t) = \varphi(x)\cdot\Psi(t) \quad e$$

$$k \in \mathbb{R}: \begin{cases} \varphi''(x) - k\cdot\varphi(x) = 0 \\ \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0 \end{cases} \quad \text{con } \varphi \not\equiv 0 \ ;$$

che ha soluzione se e solo se $k = -n^2$, con $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 1$:

$$\varphi_n(x) = \sin(nx).$$

Considero l'equazione per $\Psi$:

$$\Psi''(t) - (4 - n^2)\Psi(t) = 0$$

Il segno di $4 - n^2$ (quindi quello del discriminante di $d^2 - (4-n^2) = 0$) cambia con $n$.

$\boxed{n=1}$ $\Psi_1(t) = A_1 \cdot e^{\sqrt{3}t} + B_1 \cdot e^{-\sqrt{3}t}$

$\boxed{n=2}$ $\Psi_2(t) = A_2 + B_2 \cdot t$

$\boxed{n\ge 3}$ $\Psi_n(t) = A_n \cdot \cos(nt) + B_n \cdot \sin(nt)$

La soluzione generale (formale) di (E) + (CB) è:

$$v(x,t) = \left(A_1 \cdot e^{\sqrt{3}t} + B_1 \cdot e^{-\sqrt{3}\cdot t}\right) \cdot \sin(x)$$

$$+ (A_2 + B_2 t) \cdot \sin(2x) +$$

$$+ \sum_{n=3}^{\infty} \left[A_n \cdot \cos(nt) + B_n \cdot \sin(nt)\right] \cdot \sin(nx)$$

Impongo le condizioni:

$$f(x) = v(x,0) = (A_1 + B_1) \cdot \sin(x) + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \cdot \sin(nx)$$

$$\| $$

$$\sin(x) + 2 \cdot \sin(2x) + 3 \cdot \sin(3x)$$

$$g(x) = v_t(x,0) = \sqrt{3}(A_1 - B_1) \cdot \sin(x) + \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot B_n \cdot \sin(nx)$$

$$\|$$

$$0$$

da cui:

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = 1; & A_2 = 2; \; A_3 = 3; \; A_n = 0 \;\; \forall n \geq 4 \\ A_1 - B_1 = 0; & B_n = 0 \;\; \forall n \geq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A_1 = B_1 = \frac{1}{2}$$

Quindi:

$$v(x,t) = \frac{e^{\sqrt{3}t} + e^{-\sqrt{3}t}}{2} \cdot \sin(x) + 2 \cdot \sin(2x) + 3 \cdot \cos(3t) \cdot \sin(3x)$$