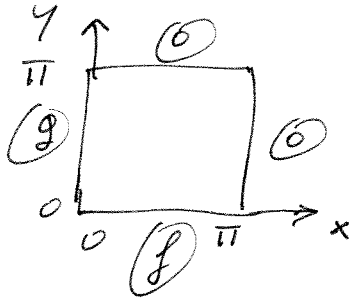
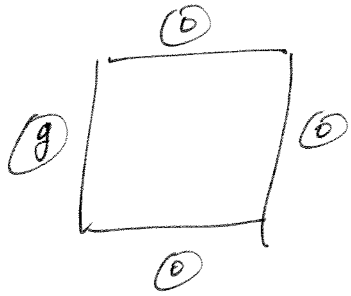
$$(1)\begin{cases} \Delta u(x,y)=0 & 0\le x\le\pi \\ & 0\le y\le\pi \\ u(\pi,y)=0 & \\ u(0,y)=g(y)=\sin(7y) & \to 0\le y\le\pi \\ u(x,0)=f(x)=\sin(5x) & \to 0\le x\le\pi \\ u(x,\pi)=0 & \end{cases}$$

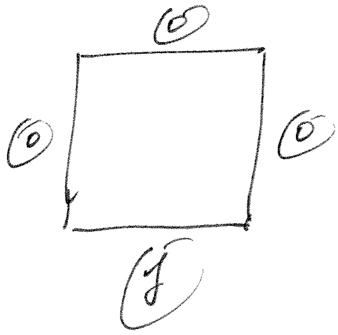


Risolvo separatamente i problemi

$$(2)\begin{cases} \Delta v(x,y)=0 \\ v(\pi,y)=v(x,0)=v(x,\pi)=0 \\ v(0,y)=\sin(7y)=g(y) \end{cases}$$



$$(3)\begin{cases} \Delta z(x,y)=0 \\ z(0,y)=z(\pi,y)=z(x,\pi)=0 \\ z(x,0)=f(x)=\sin(5x) \end{cases}$$



dopodichè (verificatelo!)

$$u=v+z$$

risolve (1).

Risolvo (2).

Inizio col trovare soluzioni $v(x,y)=\varphi(x)\cdot\psi(y)$ del problema

$$\begin{cases} \Delta v(x,y)=0 \\ v(x,0)=v(x,\pi)=0 \end{cases}$$

~~In modo del tutto standard~~
ci si riconduce a

$$(4)\begin{cases} \varphi''(x)\cdot\psi(y)+\varphi(x)\cdot\psi''(y)=0 \\ \psi(0)=\psi(\pi)=0 \end{cases}$$

quindi $\exists\, k\in\mathbb{R}$: $-\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}=+k=\frac{\psi''(y)}{\psi(y)}$

e ci riconduciamo al problema agli autovalori:

$$(5)\begin{cases} \psi''(y)=k\cdot\psi(y) \\ \psi(0)=\psi(\pi)=0 \end{cases}$$

che ha soluzioni $\psi\not\equiv 0$ se e solo se $k=-n^2$ ($n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$), nel qual caso $\psi=c\cdot\psi_n$ con

$$\psi_n(y)=\sin(ny).$$

~~Sostituendo le soluzioni di (5) in (4) e~~ Usando la solita procedura, abbiamo da (5) che le soluzioni di (4) sono, per $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$.

$$v_n(x,y)=\varphi_n(x)\cdot\psi_n(x)=\left(A_n e^{nx}+B_n e^{-nx}\right)\cdot\sin(ny)$$

Impongo la condizione (omogenea):

$$0=v_n(\pi,y)=\left(A_n e^{\pi n}+B_n e^{-\pi n}\right)\cdot\sin(ny),$$

che mi dà

$$B_n=-A_n e^{2\pi n}, \qquad \text{da cui}$$

$$v_n(x,y)=A_n\cdot\left(e^{nx}-e^{2\pi n}\cdot e^{-nx}\right)=A_n e^{\pi n}\cdot\left(e^{n(x-\pi)}-e^{n(\pi-x)}\right)$$

La soluzione generale di (2), esclusa la condizione $v(0,y)=\sin(2y)$, è

(6) $v(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{\pi n} \cdot \left(e^{n(x-\pi)} - e^{n(\pi-x)}\right) \cdot \sin(ny)$.

Impongo l'ultima condizione:

$\sin(7y) = v(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{\pi n} \cdot \left(e^{-n\pi} - e^{n\pi}\right) \cdot \sin(ny)$,

da cui

$A_n = 0$ per $n \neq 7$ e

$A_7 = \dfrac{1}{e^{7\pi} \cdot \left(e^{-7\pi} - e^{7\pi}\right)}$, quindi

(7) $v(x,y) = \dfrac{e^{7(x-\pi)} - e^{7(\pi-x)}}{e^{7\pi} \cdot \left(e^{-7\pi} - e^{7\pi}\right)} \cdot \sin(7y)$

In maniera del tutto analoga (o scambiando le variabili) la soluzione di (3) e meno della condizione
$z(x,0) = f(x)$ è

(8) $z(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot e^{\pi n} \cdot \left(e^{n(y-\pi)} - e^{n(\pi-y)}\right) \cdot \sin(nx)$.

Sostituendo l'ultima condizione in (8):

(9) $z(x,y) = \dfrac{e^{5(y-\pi)} - e^{5(\pi-y)}}{e^{5\pi} \cdot \left(e^{-5\pi} - e^{5\pi}\right)} \cdot \sin(5x)$.

Da (7) e (9) segue che la soluzione di (1) è

$$u(x,y) = e^{-7\pi} \cdot \frac{e^{7(\pi-x)} - e^{7\cdot(x-\pi)}}{e^{7\pi} - e^{-7\pi}} \cdot \sin(7y)$$

$$+ e^{-5\pi} \cdot \frac{e^{5(\pi-y)} - e^{5(y-\pi)}}{e^{5\pi} - e^{-5\pi}} \cdot \sin(5x)$$