DOMANDE DI TEORIA I

Nicola Arcozzi

October 16, 2009

(I) Sia $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una successione crescente di numeri reali. Quali delle seguenti conclusioni segue necessariamente dalle ipotesi?

(1) a è inferiormente limitata.

(2) a è superiormente limitata.

(3) a è limitata.

(4) $\exists \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

(5) $\exists \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$.

(6) Se a è superiormente limitata, allora a è limitata.

(7) Se esiste $M = \max\{a_n : \ n \in \mathbb{N}\}$, allora $\lim_{n\to\infty} a_n = M$.

(8) Se esiste $m = \min\{a_n : \ n \in \mathbb{N}\}$, allora $\lim_{n\to\infty} a_n = m$.

(9) Se esiste $M = \max\{a_n : \ n \in \mathbb{N}\}$, allora esiste $\overline{n} \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq \overline{n} \implies a_n = M$.

(10) Esiste $m = \min\{a_n : \ n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$.

(11) Esiste $M = \max\{a_n : \ n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$.

(12) Se a è superiormente limitata, allora esiste $\overline{n} \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq \overline{n} \implies a_n = M$.

(13) Esiste $\sup\{a_n\} \in \mathbb{R}$.

(14) Se a è superiormente limitata, allora esiste $\sup\{a_n\} \in \mathbb{R}$.

(15) Esiste $\sup\{a_n\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

(16) Sia $b_n = a_{2n+1}$, $n \geq 0$. Allora, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ è crescente.

(17) Sia $c_n = 2a_n + 1$, $n \geq 0$. Allora, $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ è crescente.

(18) Sia $\{a_n\}$ superiormente limitata e sia $A = \sup\{a_n\}$. Allora, $\forall \epsilon > 0$ $\exists n_\epsilon :\ \forall n \in \mathbb{N}\ n \geq n_\epsilon \implies A - \epsilon \leq a_n \leq A$.

(19) Se $\exists \lim_{n\to\infty} a_{n^2} = l \in \mathbb{R}$, allora $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$.[1]

(20) $\{|a_n|\}$ è una successione crescente.

(21) Esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $\{|a_n|\}_{n=N}^{\infty}$ è una successione crescente.

(22) Esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $\{|a_n|\}_{n=N}^{\infty}$ è una successione crescente o esiste $M \in \mathbb{N}$ tale che $\{|a_n|\}_{n=M}^{\infty}$ è una successione decrescente.

(23) $\{-a_n\}$ è una successione decrescente.

(II) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Vero o falso?

(1) Se f è crescente e g è crescente, allora $g \circ f$ è crescente.

(2) Se f è decrescente e g è decrescente, allora $g \circ f$ è decrescente.

(3) Se f è crescente e g è strettamente crescente, allora $g \circ f$ è strettamente crescente.

(4) Se f è costante *e* g è costante, allora $g \circ f$ è costante.

(5) Se f è costante *o* g è costante, allora $g \circ f$ è costante.

(6) Se $g \circ f$ è costante, allora f è costante o g è costante.

[1] Con $\lim_{n\to\infty} a_{n^2} = L$ s' intende $L = \lim_{n\to\infty} b_n$, dove $b_n = a_{n^2}$ per $n \geq 0$.

Soluzioni.

(I) (1) V ; (2) F ; (3) F ; (4) V ; (5) F ; (6) V ; (7) V ; (8) F ; (9) V ; (10) F ; (11) F ; (12) F ; (13) F ; (14) V ; (15) V ; (16) V ; (17) V ; (18) V ; (19) V ; (20) F ; (21) F ; (22) V ; (23) V .

(II) (1) V ; (2) F ; (3) F ; (4) V ; (5) V ; (6) F .